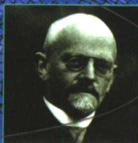
数学之旅
THE HISTORY OF MATHEMATICS

几何学
Geometry



空间和形式的语言
THE LANGUAGE OF SPACE AND FORM

〔美〕约翰·塔巴克 著
John Tabak

 商务印书馆

数学之旅

THE HISTORY OF MATHEMATICS

在这一本书里，我们追溯了几何学的历史——那些想象力、创造力和努力工作交织在一起的故事。数世纪以来，“几何学”这一术语指的是古希腊的几何学，也就是欧几里得几何学。它是人类第一次有系统地看到几何的本质，并由此得到的伟大成果。随着希腊的数学文化的传播和发展，数学家对空间和形式的理解也在拓广和加深，他们清楚地认识到：欧几里得几何学只是许多几何学中的一种。此后，射影几何、解析几何和微分几何等诸多几何分支便相继出现了。而当数学家把几何学相对论联系在一起时，思想的撞击，完完全全地改变了我们以往的时空观。从而把人类的视野带到了一个全新的领域。然而，几何发展的脚步并未就此停止。无限维几何学的出现，吸引了许多数学家的视线，但它能将人们引领向何方，依旧是一个未解之谜。

数学之旅丛书	
代数学	数学和自然法则
几何学	数
概率论和统计学	

网址：www.cp.com.cn
ISBN 978-7-100-05557-4



定价：17.00 元

数学之旅

几　何　学

——空间和形式的语言

〔美〕约翰·塔巴克　著

张红梅　刘献军　译

胡作玄　校

商　务　印　书　馆

2008年·北京

图书在版编目(CIP)数据

几何学:空间和形式的语言/〔美〕塔巴克著;张红梅,刘献军译.—北京:商务印书馆,2008
(数学之旅)
ISBN 978-7-100-05557-4

Ⅰ.几… Ⅱ.①塔…②张…③刘… Ⅲ.几何学
Ⅳ.018

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第110189号

数学之旅
几 何 学
——空间和形式的语言
〔美〕约翰·塔巴克 著
张红梅 刘献军 译
胡作玄 校

商 务 印 书 馆 出 版
(北京王府井大街36号 邮政编码100710)
商 务 印 书 馆 发 行
北 京 民 族 印 刷 厂 印 刷
ISBN 978-7-100-05557-4

2008年2月第1版 开本 850×1168 1/32
2008年2月北京第1次印刷 印张 7⅜
印数5 000册
定价:17.00元

数学之旅的意义

数学有着几千年的历史。数学的历史最早开始于人类要用星星预测未来,后来有了古希腊人到埃及用几何方法测量金字塔的高度,再以后有了哥白尼、伽利略、牛顿、达·芬奇……一个又一个响亮的名字,他们大胆的设想、计算、实验,铺就了一条数学之路。这条路的近端是我们面前的计算机等各种数字化的现代科学。正是这条路,见证了人类文明发展的历程,也把由数学改变的物质生活带到了人间。

我们出版这套"数学之旅"不仅为了让大家了解数学的形成和发展,还想告诉大家,数学在形成和发展的过程中经历了什么——不仅在于如何发现问题,更在于怎样提出问题;不仅在于怎样解释问题,更在于怎样解决问题。就这样,数学发展了。由于数学的精确性,所有的自然科学学科几乎都与数学有关联。数学成了各个自然科学研究学科的主要工具之一。之所以这样说,是因为数学不仅可以作为计算的准则,而且它更能体现定性和定量的转化,也就更加便于传授和继续研究。很多自然科学的问题就在科学家的数学计算中解决了。其结果是提高了人的生活质量,丰富了人类的物质文明。

"数学之旅"不是教科书,也不是教辅,它只是为在新时代中对数学和自然科学历史感兴趣的人提供一些阅读生活。不过,从中

学到一些如何观察现象和提出问题的方法，了解教科书中那些定理的形成，从而把自己投入到人类文明的进程中去，或许可以成为阅读者意想不到的收获吧。

商务印书馆编辑部

序

胡作玄

数学，也许还有古典音乐，是人类精神的最高创造。它完全从头脑中产生，就像雅典娜从宙斯的前额中跳出来一样。作为人类思想的最高境界，数学往往带有它那种特有的灵性和神秘，远离芸芸众生，可是对于少数人，数学却能像音乐一样，给他们以巨大的心灵震撼。请看一下《罗素自传》的第一卷："11 岁时，我开始学习欧几里得几何学，哥哥做我的老师。这是我生活中的一件大事，就像初恋一样令人陶醉。我从来没有想象到世界上还有如此美妙的东西。"无独有偶，爱因斯坦在他的"自述"中也谈到："12 岁时，我经历了另一种性质完全不同的惊奇：这是在一个学年开始时，当我得到一本关于欧几里得平面几何的小书时所经历的。这本书里有许多断言，比如，三角形的三条高线交于一点，它们本身虽然并不是显而易见的，却可以很可靠地加以证明，以致任何怀疑似乎都不可能。这种明晰性和可靠性给我造成了一种难以形容的印象。"当然，他们两位所说的还是 2300 年前的欧几里得，而到 21 世纪我们所有的数学瑰宝就更加光彩夺目，远远超出人们的想象。

虽说数学大厦高耸入云，它却不是建在天上，只是少数神仙的游乐场。它植根于地下，也朦胧地出现在每个人的心中。这是因

为数学不仅有精神天父的基因,也有物质地母的基因。这决定数学从一开始就不可避免地是一种实用知识,它们实在太俗了,以至于某些自以为有高贵血统的人拼命要掩盖其卑贱的出身,就像概率论学者不爱提它来自赌场的问题。计量、商贸、会计、人口普查是最早的应用数学,现在依然如此。尽管它们早已被排除在数学之外,可是正是这些活动把数学与日常生活联系在一起,也正因为如此,基础数学教育应运而生,至今仍是兴旺发达的事业。说到这里,我们不能不为中国古代的数学和数学教育而自豪,早在孔夫子之前,中国(至少在齐国),九九表已经相当普及,可是两千年后,意大利的商人子弟在家乡只能学会加法,而要学乘法就得进城请教专家、大师了。西方的基础教育有 3R(Reading, Writing, Arithmetic)的说法,简言之就是读、写、算,这说明在把文盲教育成识字的人的同时,还要使他们不致维持"数盲"的状态。其实,对于绝大多数人来说,这已经足够了,哪怕是现在的"信息时代"、"数字化时代"。

奇怪的是,虽然人们并不太需要太多的数学,数学教育家却结结实实地灌输给学生大量的数学。如果你小学毕业,6 年数学都是主课。如果你完成义务教育,那就得念 9 年数学。高中 3 年的数学更是难得要命,这还没有算上微积分。即便中学不学微积分,上大学许多人还是逃不掉,不仅学理工的要念微积分,学经济、金融、管理的也要念。学文的虽然可逃此一劫,可老托尔斯泰的《战争与和平》的最后,就有微积分的论述,而且颇为深刻。马克思、恩格斯、列宁也懂微积分。这么说,难道一个人非得念十好几年的数学吗? 更糟的是,正课之余许多学生还得为"奥数"拼搏。这些题之偏之难连国际著名的数学大师陈省身都不一定做得出来。费了半天劲,除了文凭和分数之外,究竟有什么收获呢?

把大量数学教给青少年也许并不是那么不合理。相反,从古到今,数学一直受到重视。柏拉图的学园禁止不懂几何学的人入内。按照他的说法,不会几何学就不会正确的思考,而不会正确思考问题的人不过是行尸走肉。这就形成后来学习没用的数学的辩护词,你学的数学可能不直接有用,但它是训练头脑的体操。不过这个体操对许多学生还是太难了。那时教材也就是欧几里得的《几何原本》。许多学生学到第五个命题"等腰三角形两底角相等"就过不去了,于是这个命题被称为"驴桥",也就是笨人难过的桥。不过,就算勉强过了,是否能变聪明也真的很难说。如果说,以前多学数学还无所谓,那么,17 世纪末近代科学的产生的确充分证明数学的威力。牛顿无愧是有史以来最伟大的科学家,他一手建立牛顿力学,另一手建立微积分,正是他在三百多年前把科学奉献给文明社会。18 世纪美国大诗人蒲柏这样赞美:

自然及其规律浸没在黑暗中,
上帝说,让牛顿诞生,
于是,世界大放光明。

正是牛顿使科学和基于科学的技术推动了历史,使它变成须臾不可离的东西。同时,他也给后人带来不少麻烦。虽然你可以"师夷人之长技以制夷",可是,那永远走不远,因为许多技术建立在科学基础之上,不学科学难对技术有重大改进,而学科学又不能不学一整套数学,其中微积分只不过是基础的基础。而学数学又与学自然科学不同,总要从基础学起。要想学微积分,首先要把算术、代数、几何、三角、解析几何学好,学计算机又要学离散数学,学经济和金融又要学概率、统计等等。其实这些说到底都是二三百年前的数学了,不过,让这些功课都进入中学的数学课,对于多数人来

说，还真有些吃不消。

这就是为什么数学成为现在压在学生头上的两座大山之一（另一座是英语）。多学数学没有坏处，问题是花了这么大的力气，究竟收获几何？真是可怜得很。多数人根本用不上他们所学的知识，也没有掌握数学的思想方法，在理解新的数学时仍然感到十分困难。而更糟的是，许多学生失去学习数学的兴趣。如果一个人觉得数学很重要，只是被动地硬着头皮去学，肯定是事倍功半；可是，如果主动地、津津有味地学，也许会事半功倍。有没有既能培养数学兴趣，同时又能提高对数学理解力的道路呢？有！那就是学点数学史。

数学史所能告诉读者的信息，大部分是其他数学书一般根本没有的，甚至根本不具备的。一般数学书一上来就是定义、定理、证明，它们论述得非常严格，但是读者一般感觉就是丈二和尚摸不着头脑。数学讨论的许多抽象概念，最难掌握的是研究的动机，也就是引入这些概念究竟干什么，而这只能通过历史才能看到它的来龙去脉。许多数学理论都是通过解决一个理论问题或一个实际问题在历史长河中慢慢形成的。古希腊的三大几何问题经过两千多年才在 19 世纪得到完满解决，并且形成伽罗瓦理论。历史的流变总是帮助读者认识到问题的难点以及数学上的伟大突破，可是教科书则很少告诉你，什么是重要的，什么是不重要的。只有懂得这些，才能说是懂得数学。一句话，数学史绝对有助于理解抽象难懂的数学。

其次，数学史不是拘泥于狭窄的学科领域，而是在更大的文化背景之下看数学的发展。这反映出数学与社会是紧密联系在一起的，正因为如此，数学在各个领域中的应用也就是顺理成章的事。

文艺复兴的巨匠们的绘画之所以栩栩如生,正是由于他们掌握了透视的基本方法,这导致射影几何学的诞生。大航海时代推动了地图(海图)绘制技术的发展,它反过来也推动了人们了解曲面的几何学。同样,工程画也成为工程技术人员的通用语言。随着客观世界的不确定性的大量出现,概率和统计也应运而生。尽管概率论有着并不光彩的出身,但赌徒的问题毕竟使数学家建立起系统的理论,而且有越来越多的应用。说到底,物理科学是产生数学与应用数学最重要的领域,这从历史上也可以体会到。我们现在司空见惯的事物,例如无线电波,都是解微分方程的产物,这些结果是如此深刻,超出一般人的理解,其原因就是它们是巨人的劳作,而这些巨人又是站在巨人的肩膀上。

数学的实质在于有一套提出问题和解决问题的普遍理论及方法。数学家人数现在不能说少,但作出巨大贡献的天才也不算太多。数学史与通史一样,首先推崇英雄,他们少说有二三十位,多说有四五十位,学数学史就是要从他们的身上学点东西。

塔巴克的一套五本数学史,最为适合有一般数学知识的读者,它内容丰富、行文流畅、通俗易懂、生动有趣,如果能够好好看看,对数学的理解必定会大有提高,而这种收益是读多少教材、教辅,做多少题也达不到的。

目　　录

第二部分 射影几何学

第三部分 坐标几何学

引　言

什么是几何学？学习几何学时，我们究竟学到了什么呢？

当数学家们研究几何学时，点、线和面是他们研究的一些对象，人类始终对线和形的问题感兴趣。法国拉斯科的最近一次冰河时期的石窟壁画，呈现出了相当精致的野生动物的图画，这些美丽的图画大约创作于15 000年以前。在人类历史的长河中，人们几乎无法想象它们的古老程度，当时人类正处于以打猎为生的石器时代。直到创作这些图画几千年以后，世界上才有了文字，但这些石窟壁画表明了这样一个事实：在15 000年以前，石窟艺术家对线和形的使用非常敏感。这就意味着他们知道几何学吗？如果他们确实知道一些几何学，那么他们知道几何学的哪些数学内容呢？

几个世纪以来，欧洲、中东，以及北非的数学家认为他们知道“什么是几何学”。对他们来讲，答案很简单。“几何学”这一术语指的是古希腊的几何学，这种几何学用希腊最著名的数学家之一——亚历山大的欧几里得——的名字来命名，称作欧几里得几何学。学习几何学时，我们究竟学到了什么呢？这个问题的答案(对于他们)也同样显然：我们在欧几里得的名著的《几何原本》里学习了定理和证明。这些早期的数学家没有探究是否可能存在其他的几何学，他们相信能够学习的大部分几何知识早期已经在其他地方学过了，留给他们所做的全部工作就是掌握希腊的几何学，

以及阐明他们自认为是希腊几何学里仍需要阐明的观点。欧几里得几何学是几何学,他们认为自然界中的一切事物只不过是欧几里得几何学里的一道习题而已。

众所周知,古希腊人在几何学领域取得了辉煌的成就。在大约一千年的时间里,希腊文化哺育出了一代又一代的杰出的数学家。无论在这之前还是之后,没有其他文化能与之相匹敌,它在数学上的精彩程度以及影响的深远程度上都创造了历史纪录。几乎从一开始,希腊人就提出了有关数学的本质以及怎样才算理解了数学之类的深刻问题。他们创造了证明的思想,同时也努力把几何学置于牢固的逻辑基础之上。希腊的许多数学发现——证明和结果本身的陈述——现在读者听起来仍然具有现代色彩。虽然希腊人创造了在我们现代意义下所能理解的数学,但是他们的工作对洞悉当代数学家关于几何学的理解没有什么帮助。现在的数学家们已经认识到欧几里得几何学只是许多几何学中的一种。

几何学是对几何性质的研究,这是几何学的一个比较现代化的定义。它也是前面那个问题的一个简洁易懂的答案,但显然不是一个完整的答案,它只是把我们的注意力从"几何学"这个术语引到"几何性质"这个短语上来。

什么是几何性质? 三维(甚至更高维)空间中的点、线、面、角、曲线、曲面和物体可能都值得几何学进行研究,但对一个对象来讲,并不是每个有关它的性质都是几何性质。一个三角形的形状可以看作是一个几何性质,但它的颜色、温度以及它与读者的距离都不是几何性质。那可能是显而易见的,但也是重要的。理解数学家们所研究的几何学内容的关键在于:辨别一个对象有哪些性质是几何性质。

我们不妨设想在一个平展的表面上有一个三条边等长的三角形(三条边相等的三角形称作等边三角形)。因为这个三角形的三条边等长,所以不难证明它的三个角也必定相等。它的三个角相等是三条边相等的"推论",我们还可以进一步推出如下结论:因为这个三角形的三个角相等,所以它的每个角必定是60°。因此,如果我们知道了三角形的三条边等长,就能推出它的三个角都是60°。

现在,我们假定:让这个三角形从它的初始位置倾斜。它还是等边三角形吗?它的三个角还相等吗?每个角还是60°吗?当我们使它倾斜或者使它稍微向一侧偏离时,我们还能够确信上述结论成立吗?或者我们不得不重新研究这个三角形?

我们中的绝大多数人只是假定:一旦知道了一个三角形的三个角的大小之后,如果我们只是使三角形移动离开了它的初始位置,那么就没有必要重新证明我们的发现。欧几里得做了同样的假设。让这个三角形从一个位置倾斜或滑动至另一位置,边的长度和角的大小保持不变。这对你来说可能是显然的,其中不太明显的含义可能是:这个简单例子也包含着理解数学家研究几何学时到底研究什么的关键。

几何学研究的是图形在一组特殊的运动下不改变的那些性质。例如,欧几里得几何学研究的是当图形倾斜(旋转)或沿一条直线运动(平移)时不改变的那些性质。当古希腊人证明某个图形具有一个特殊的几何性质时,这个证明也适用于位于任何地方能够通过一系列平移和旋转与原图形重合的每个图形。这就是说,因为长度和角度在旋转和平移下保持不变,所以它们是欧几里得几何学里的几何性质。

文艺复兴时期,艺术家们试图在二维画布上描绘出三维图形,射影几何学正是起源于这样的尝试的一门几何学,它是用另一组不同的运动来定义几何学的一个例子。定义射影几何学的运动称作射影。射影既不保持线段的长度,也不保持角的大小。这听起来可能让人感到很奇怪,实则不然。当图像从胶卷"投射"到电影屏幕上时,我们能够用射影几何学来描述它们是如何变化的。在射影几何学里,尽管两个看起来不同的三角形最初可能有不同的形状或大小,但它们能够通过一系列的射影"运动"重合。因此,在射影几何学里,两个看起来完全不同的三角形有可能是"相同的"。总之,研究射影几何学的数学家们不关心长度和角度,长度和角度不是射影几何学里的几何性质。

其他几何学可以用别的一组运动来定义。

数学家们花费了很长时间才把他们的想象力从单一的欧几里得几何学扩展到现在种类繁多的、异彩纷呈的几何学。他们几乎花费了同样长的时间来认识什么是几何性质:几何性质是在一类运动下保持不变的性质。这种描述令人感到奇怪,几何学看起来好像是静止的,每种几何学却通过一类运动来定义。

在这一卷书里,我们追溯了几何学的历史,那是想象力、创造力和努力工作交织在一起的故事。我们从中可以看到以下内容:一些思想和一些问题如何从一代数学家流传到下一代数学家,每一代数学家如何用新的观点和新的方法解决这些问题,以及每一代数学家如何扩展具有原创性的思想和重新解释起初看起来相对简单的问题。简单和复杂,具体和抽象,这些对立的描述刻画了几何学。几何学这门学科的历史至少和文明一样古老。

几何学仍处在不断发展和变化之中。数学家对形和空间的理

解仍在拓广和加深。始于古代的伟大的几何问题———一千多年来一些最优秀的数学家没能解决的问题——现在已经解决,但在这期间又发现了其他许多新问题,有许多至今尚未解决。

我们几乎可以肯定,一些最有趣的、最重要的几何问题还有待提出。在四千多年的思索和研究之后,几何学发现的步伐从未像现在那样快捷。许多数学家感觉自己似乎只是刚触及了数学的表面而已。如果我们能够对过去有一个公正的评价,那么就能够更好地理解现在这种令人振奋的发展了。建立那种评价正是我们撰写这本书的目标所在。

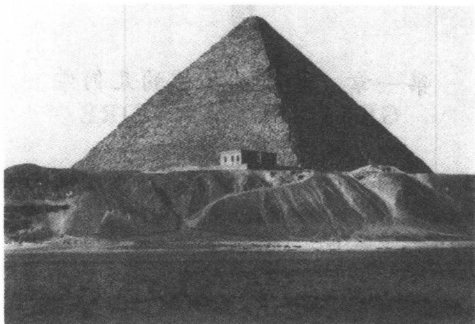
第一部分　古代的几何学

第一章　希腊人之前的几何学

几何学的研究始于埃及。这是公元前5世纪希腊历史学家希罗多德(Herodotus)的看法,他认为几何学源于社会生产的需要。每年雨季到来时,尼罗河泛滥,都要淹没尼罗河流域肥沃的土地,有时会摧毁边界标记,有时则会改道而行冲走许多块土地。由于人们按照耕地的多少来征收农业税,所以为了恢复地界和确定税金,洪水过后需要重新丈量土地。发明快速、精确的方法来丈量耕地显然是埃及人发展几何学的动力。为了满足这些简单的需求,埃及人很快就发展了简单的度量几何学,这部分几何学主要包括他们在测量中所涉及的方法和概念。

这些早期的应用数学家的主要工具之一是可围成三角形的绳子。事实上,这些早期的测量员——数学家——被称为"司绳",其中蕴涵的想法十分简单。假设一条绳子被等分成(可能是用绳结)12段。当它围成三角形时,如果一边长三个单位、另一边长四个单位、最后一边长五个单位,那么就构成了一个直角三角形。这条绳子围成的三角形的角可用来做简单的角度测量,绳子本身也是长度测量的一个方便工具。很明显,简单的结绳方法是埃及人进行快速、精确的测量所必需的,他们所应用的这些方法对邻近的希腊人产生了重大影响。

埃及人对几何学的兴趣没有超越实际生活的需要。他们发明



吉萨大金字塔。埃及的纪念物往往规模宏大且具有朴素的几何形状。(Library of Congress, Prints and Photographs Division)

了公式来计算某些简单的面积和体积,其中有些公式相对精确一些。例如,他们发明了计算圆面积的公式。这个公式并不精确,但是就实际应用来说,一个好的近似公式与一个精确公式一样适用,埃及人一般不区分这两类公式。他们用3加上一个小分数来估计π,这样计算圆面积时便产生了误差。同样地,当我们把π输入计算器时也将误差带入了计算。然而,埃及人和我们的不同之处在于,他们没有意识到或者根本不关心这些结果中的误差。

在研究三维图形时,埃及人对金字塔的几何性质很感兴趣,我们对此一点儿也不感到奇怪。例如,已知金字塔的底长和它的高度,就可以计算出金字塔的体积。(这是十分重要的,因为它将两个长度测量——长度和高度——与体积联系了起来,而长度测量

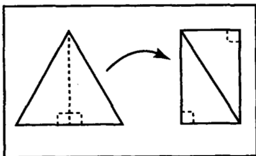
往往比体积测量容易得多。)埃及人还讨论了金字塔的其他数学性质。例如,已知金字塔的底长和它的高度,就知道如何计算出一个刻画金字塔侧面险峻程度的数值。(这个数值类似于——但不等于——学生们在代数学入门课程里所计算的斜面的坡度。)起初,埃及的数学发展十分迅速,埃及人在早期研究了大量的二维和三维问题。然而,它不久便停滞不前了,而且在这之后的两千多年时间里没有太大的改变。

古埃及的几何学历史悠久,但在大部分时间里却一直停留在现今高中生很容易理解的水平上。不过,这种比较容易引起误解。同我们的计数系统相比,埃及的计数系统十分笨拙,即使进行简单的算术和几何计算都要比现在的方法复杂得多。因此,那时候研究的问题对于埃及人来说未必比我们现在理解起来要更难,但解决起来肯定比我们困难得多。

现存的对古埃及数学知识最详细的了解来源于阿梅斯纸草书(Ahmes Papyrus,又称莱茵德纸草书(Rhind Papyrus)),它是一部有关数学问题的著作。我们之所以这样称呼它,是因为它是在大约18英尺(5.5米)长的纸草片制作的卷轴上面所抄录的长长的问题列表。抄写者是阿梅斯(约公元前1650年),他有可能不是文章的作者。学者们认为阿梅斯纸草书是比其早几个世纪的另一部纸草书的抄本。

为了让大家体会到埃及人所感兴趣的那类几何学内容,下面将阿梅斯纸草书里的第51个问题意译出来。在第51个问题中,阿梅斯计算了等腰三角形的面积(等腰三角形是有两条边相等的三角形)。为了求出面积,阿梅斯设想沿着对称轴从中间将其剪开,这样就得到了两个形状相同的直角三角形。然后他想象着把

两个三角形沿着斜边拼成一个矩形(见插图),并推出该矩形的面积与原等腰三角形的面积相等。他之所以这么做是因为他知道如何求得矩形面积:矩形的面积等于高与宽之积。新拼出来的矩形的长等于原等腰三角形的高,前者的宽为后者底边长的一半,他的结论是三角形的面积等于高与底边乘积的一半,简记为:(三角形的面积)$=\frac{1}{2}\times$(底边)$\times$(高)。当然,阿梅斯的做法非常正确。



阿梅斯求等腰三角形的面积的方法:沿着对称轴剪开三角形,然后拼成一个矩形,计算这个矩形的面积。

在希腊人之前并非只有埃及人研究几何学。从数学上来讲,或许那个时代最先进的文化要数美索不达米亚人所创造的文化。美索不达米亚位于现在的伊拉克境内,距离埃及约1 000 英里(1 600千米)。它的建筑物不如埃及的著名,那是因为埃及人的坚实的建筑物是用石头建造的,而美索不达米亚人的建筑物是用不耐久的泥砖建成的。然而,美索不达米亚的数学却比埃及的出名,因为他们用来记录数学知识的泥版比埃及的纸草书保存得要持久得多。有关埃及数学的原始著作仅有极少数幸存下来,而美索不达米亚却有成百上千块数学泥版文书被发现和翻译,它们只是已被发现的不计其数块泥版文书中的一小部分,许多包含重要数学内容的非数学泥版文书已经找到。例如,已发现的天文泥版文书中包含着许多有关美索不达米亚数学的信息。建筑记录泥版文书亦是如此,设计者需要经过相当复杂的计算才能够确

定原料需求量(泥砖是主要的建筑材料)以及完成整个项目的工时数。

上述这些泥版文书清楚地表明了这样一个事实:美索不达米亚数学家对代数学的喜好程度胜于几何学,甚至他们的几何问题也常常带有代数的色彩。例如,美索不达米亚人在毕达哥拉斯出生前好几个世纪就知道了毕达哥拉斯定理(这个定理的内容如下:在一个直角三角形中,斜边长的平方等于其余两边长的平方和)。虽然他们的泥版文书中包含着许多与毕达哥拉斯定理有关的问题,但这些问题中强调的是解最后得到的方程,因而毕达哥拉斯定理只是提供了另一种来源的可解的代数问题。

美索不达米亚人对几何学感兴趣,主要是因为他们将其作为辅助自己测量和计算的一套方法。与埃及人相同,他们发展的主要是度量几何学。例如,他们能够计算具有城墙形状(底宽顶窄的具有直边的三维形状)的物体的体积,但他们关注泥砖砌成的墙而非抽象的形状,其动机显然是求建造城墙所需要的砖块数以及工时数。与研究几何形状相比,他们对估算费用更感兴趣。对于美索不达米亚人来讲,几何学至多是一种计算方法。

与埃及人相比,美索不达米亚人对于数及计算方法有着更为深刻的理解。所以,他们发明了远比同时期埃及人更为精确的近似解法,特别是在代数学方面——在某些几何问题方面也是如此,他们得到了较为先进的结果。例如,埃及人显然没有意识到毕达哥拉斯定理的一般情形,而美索不达米亚人理解这个定理却深刻得多,他们能够解决许多与之相关的问题,其中的一些问题对于当今接受过良好教育的人(非数学家)来说也是一种挑战。但是,美索不达米亚人同埃及人一样,他们通常对精确解和一个良好的近

似解不加区分，而且美索不达米亚数学家对证明他们得到的结果也不太感兴趣。他们对从整体上建立一套严格的方法来研究几何学不感兴趣。

埃及和美索不达米亚的数学家们主要对发展实用的几何学感兴趣。他们寻求数学公式，并用它们来计算已知某些长度的常见的特殊几何形状的面积和体积。（例如：已知圆的直径，其面积是多少？）然而，埃及人发明的表示其数值结果的方法与美索不达米亚人的大相径庭。和现在一样，埃及人使用十进制记数法，但他们用代表每个 10 的幂次的具体符号来表示数。例如：要表示 320，就得写（或者画）出三个表示 100 的符号和两个表示 10 的符号。请大家注意：在使用这种记数方法时，改变符号的顺序并不影响其所代表的数值。与之形成对照的是，美索不达米亚人采用六十进制记数法，而且使用一个几乎完备的位值制记数法系统来表示数，这在概念上与我们现在的用法类似：他们不用 10 个数字，而是用 59 个数字来表示任意一个数*；对于比 59 大的数，他们把上述 59 个数字写入下一列——每个数字所代表的值取决于其所在的列。

虽然上面两种文化用来表示数的方法不尽相同，但它们发展的几何学在观念上是相似的，因为两地的数学家都寻求数值解来解决计算问题。他们研究的内容是求积几何学，其工作中没有中心思想，也没有发明一套理论系统来编排自己发现的公式。这些工作是在特定时期内解决特定问题的数学，在通常意义上不能称之为数学。一般来讲，对几何学感兴趣的现代数学家们关心的是

* 他们没有发明表示 0 的符号，必要时候用空格代替，所以总共 59 个符号——译者注。

从一般原理演绎出更广泛类型的几何对象的性质。然而,这种“现代的”方法其实一点儿都不现代,它可以追溯到古代所有具有“现代意韵的”文化中最早的数学文化。

第二章　早期的希腊几何学

美索不达米亚人和埃及人研究几何学的方法，带有人类现在已知的具有数学传统的所有古代文化共有的特征，但希腊文化除外。希腊的数学方法从一开始就与众不同，它更重视抽象而轻视计算。希腊的数学家们研究了许多类几何对象的性质，他们关注的不仅是他们知道什么，而且还关注他们如何知道。希腊的哲学家和数学家米利都的泰勒斯(Thales of Miletus，约公元前650年—前546年)的工作最能体现这种风格了。

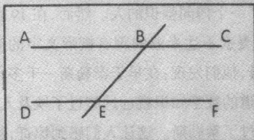
根据有关古希腊的历史记载，泰勒斯是古希腊众多的数学家和哲学家中的第一人。而且希腊的历史记载还表明，他不仅仅是数学家和哲学家，他还是个商人。有一年，橄榄长势特别好，他买断了那个地区的所有的榨油机，在橄榄成熟季节便形成了垄断。(虽然橄榄成熟时可以天价出售榨油机，但是他并没有那么做。显然他只是想看看自己是否能垄断市场。)泰勒斯游历广泛，从埃及人那里接受了有关几何学的早期教育。他肯定是个聪明的学生，因为离开埃及之前他就用一种极其巧妙的方法测量了埃及吉萨大金字塔的高度，以至于2 500年之后的现在，我们仍然记得此方法。在一个艳阳天，泰勒斯在地上垂直插了一根棍子。等到棍子的阴影与棍子的高度等长时，他测量了金字塔的影子的长度，因为他知道那时金字塔的影长等于金字塔的高度。

人们把许多有趣的几何事实的发现都归功于泰勒斯，那些故事可能都是真实的。与埃及人取得的成就的描述相比，历史上关于泰勒斯的记载确实使他成了一个博闻强识的人。然而，在19世纪晚期，考古学家们开始发现美索不达米亚的刻有楔形文字的泥版文书以及解读那些楔形符号，他们发现：在早于泰勒斯一千多年的时候，美索不达米亚人所知道的数学知识就远远超过了埃及人，而且几乎可以肯定地说，也超过了泰勒斯。这让人们感到惊奇，甚至震惊。或许泰勒斯比故事里提到的地方旅行得更远，可能他也从美索不达米亚人那里学到了一些知识。对于几何学的历史来讲，不仅“泰勒斯知道什么”是重要的，“他如何知道了那些知识”也是重要的。“直径平分圆”是体现这种不同的最好例子，人们一致将此定理归功于泰勒斯。



希腊遗址。希腊人是古代最有经验的几何学家。他们设计的庙宇反映了他们的数学审美感。(Library of Congress, Prints and Photographs Division)

没有数的数学



线 *ABC* 平行于线 *DEF*。
线 *EB* 称为横截线。
角 *ABE* 等于角 *BEF*。

不用数或者度量，希腊人如何来研究图形的几何性质呢？回答这个问题的最好的办法是举个例子。下面给出一个关于三角形的角的大小的经典证明，它是古希腊最著名的数学著作之一《几何原本》(*Elements*)中一个证明的释义。这个证明非常优美，它是纯粹几何思想的范例，仅由三个句子构成。

为了正确地评价上面那个证明，我们必须知道下述两个事实：

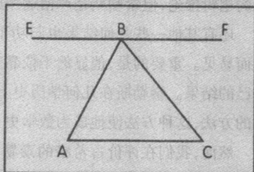
事实1：我们常说直角是90°的角，但是我们也可以把直角描述为互相垂直的两条直线所成的角。前一种情形我们是用度量的形式来描述直角，后一种情形则是用形成直角的方式来描述它。两种说法是等价的，但是希腊人只采用后者，并且他们使用这种方式，将一平角(180°)定义为两个直角之和。

事实2：当用第三条直线——横截线——去截两条平行线

在上面这个定理中，“直径”是通过圆心终止于圆边界上的直线段。泰勒斯所证明的是一条直径——任意一条直径——将圆分成相等的两部分，这是一个了不起的结果，不是因为它让人感到出乎意料，而是因为它太显然了。随便画一个圆和它的一条直径，易

时,横截线两侧的内错角相等。(这听起来复杂,但是插图可以澄清其含义。)请大家注意这里面不涉及角的大小。虽然我们不知道角的大小,但可以确定相应的角的大小相等。

上述两个事实就是我们证明如下事实时所需要知道的内容:三角形内角和等于180°;或者用希腊人的话说,三角形内角和等于两直角之和。



三角形内角和等于两直角之和的证明。

(当阅读下面的证明时,请参考带三角形的插图。)

证明:设给定的三角形为 *ABC*,作直线 *EBF*,使之平行于 *AC*。

1. 角 *CAB* 等于角 *ABE*。(事实 2。)

2. 角 *ACB* 等于角 *CBF*。(事实 2。)

3. 因而,三角形内角和等于角 *ABE*、角 *ABC*、角 *CBF* 之和。这三个角一起构成了平角 *EBF*。

请大家再次注意:这类推理过程不需要量角器,也不需要使用任何数或进行任何度量。它是希腊人所擅长的纯粹的几何推理。

见直径将圆等分为二。美索不达米亚和埃及的数学家从未怀疑过这个事实,而且几乎可以肯定地说,泰勒斯也没有提出过质疑,然而他觉得有必要演绎出这个结果,即证明这个命题的真实性。

这是思考数学的新思路:不再强调直觉而是强调演绎推理的

重要性。演绎推理,即从一般原理到特殊情形的推理过程,是数学与众不同的特征。数学是一门演绎性的学科。现在,所有数学家都是从已知原理出发开始研究,然后推导出新的事实作为那些原理的逻辑推论,但泰勒斯是严格运用此方法的第一人。

还有其他一些几何结果也归功于泰勒斯,其中有些结论比较显而易见。重要的是,他显然不依靠直觉,而是从一般原理证明了自己的结果。泰勒斯在几何学历史上的重要性主要在于他研究数学的方法,这种方法使他成为数学史上第一位真正的数学家。

然而,我们在评价古希腊的泰勒斯及其后继者的成就时必须要仔细斟酌。虽然他们研究数学的方法在许多方面都具有现代的色彩,但是他们的理解与我们有很大的不同。由于现在学习数学的方式,我们的第一反应就是给每个量分配一个数。例如,我们在前面已经看到希腊人把“直径”理解为一条线段,而现在大多数人认为“直径”就等同于一个数,即穿过圆心所截得的线段的长度。希腊人关于数的概念比我们的也要狭隘得多。不管怎样,他们往往不使用数或代数符号来表达自己的思想,他们的几何学是在这样的形式下发展起来的,他们通过作图来表达几何思想,常常利用直尺和圆规作具有特定性质的图形。一旦有了图形,剩下的事情就是用相关作图技巧的知识以及先前证明的一些有关的几何结论来推导此图形的性质。

这并不是说希腊人要通过测量他们的图形来检验结论。比如,量一下两个角是否“真的”相等。他们不会那么做,他们的作图甚至也不太认真仔细。他们的圆规和直尺往往非常简单,甚至很粗糙。他们常常通过在沙坑或在又平又硬的地面上撒沙土的方式来作图。他们借助直尺和圆规所作的图只是用来帮助自己想象和

表达思想的。当研究三维问题时，他们将注意力集中于相对简单的几何形状：圆柱体、球面、圆锥，等等。他们用平面去截三维图形，从而得到曲线。对于现代读者来讲，因为已经习惯于用代数学来表达思想，所以这种方法理解起来一点儿也不容易。代数使得希腊的许多证明理解起来更容易一些，但是希腊人直到快要对数学失去兴趣时才开始发展代数。因此，虽然希腊人研究数学的方法是演绎的、逻辑的，而且在许多方面是非常现代化的，但是希腊人表达其结果的方式与现在大多数人所习惯的方式不同。

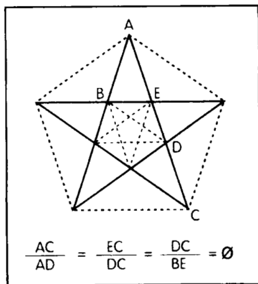
毕达哥拉斯学派

传说古希腊第二个重要的数学家是泰勒斯（古希腊第一个数学家）的学生——萨摩斯的毕达哥拉斯（Pythagoras of Samos，公元前 582 年—前 500 年）。与泰勒斯不同，他不是个商人而是个神秘主义者。与几何学相比，他对数更感兴趣，他的兴趣源于宗教信仰以及对数学的深信不疑。（在毕达哥拉斯学派的宗教信仰中，某些数是十分重要的。）和泰勒斯一样，毕达哥拉斯年轻时游历广泛。到他最终定居下来时，他成了一位被人们崇拜的人物。在追随者的簇拥下，毕达哥拉斯建立了带有神秘色彩的组织，成员们共享财产而且任何数学发现都不冠以个人名义。因而，我们无法知道哪些成果是毕达哥拉斯发现的，又有哪些成果是其追随者的工作。但是，我们可以确定毕达哥拉斯定理不是他首先发现的。我们在前面已经提到：早在毕达哥拉斯出生一千多年以前，美索不达米亚人已经知道并且广泛使用这个冠以他名字的定理了。有人说是他首先证明了这个定理；这也有可能，但没有找到证据支持这种说

法。然而,这不会贬低他在数学史上的重要地位。

毕达哥拉斯对数学和哲学的影响是深远的。毕达哥拉斯学派最重要的发现与数以及数之比有关。“万物皆数”是这个学派的信条,他们认为宇宙万物都可以仅用“计数数”(计数数指的是序列1、2、3、4、…中的数,即正整数集中的数)及其比来描述。从数学史上来看,无理数是毕达哥拉斯学派最重要的发现之一。无理数是指不能表示为两个整数之比的数。(例如,$\sqrt{2}$为无理数。)这一发现推翻了毕达哥拉斯学派所坚持的一切事物都可以用整数之比来表示的思想,据说他们曾经试图保守这个秘密。不管怎样,无理数的发现表明了这样一个事实:直觉并不总是人们发现数学真理的一个好向导。

人们通常也将后来称为“黄金分割”的发现归功于毕达哥拉斯学派。“黄金分割”是一个特殊的比,希腊人用两条线段的比来表示。下面我们来考虑五角星形(见插图),它是表示“黄金分割”的一个简单办法。例如,AC 与 AB 的长度之比是一个“黄金分割”;又如,AD 与 BE 的长度之比也是一个“黄金分割”。



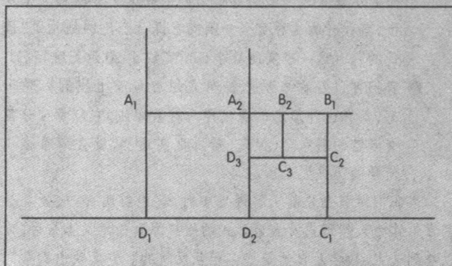
五角星形中包含许多黄金分割的例子。

“黄金分割”有时被描述为“自我增殖”,大家只要注意一下五角星形的内部是一个五边形就会明白其含义。如果我们连接所有不相邻的两个角,就可以得到另一个五角星形

黄金分割

毕达哥拉斯学派(以及后来的几代希腊数学家)关于"黄金分割"的发现在整个希腊文化里产生了反响。甚至在毕达哥拉斯去世两千多年之后,欧洲文艺复兴时期的数学家们也对黄金分割的性质着迷。下面让我们来看看黄金分割在几何学、人体解剖学以及植物学中是如何出现的(重复出现!),再度体验一下那些数学家们对此感到的惊异吧。

希腊人之所以将"黄金分割"融入他们的建筑里,是因为他们相信如此构成的矩形看起来是最漂亮的。他们建造了许多庙宇,这些庙宇正面许多重要的长度的比等于黄金分割。具有这种性质的矩形被称为黄金矩形,它们具有一个特殊的性质——展现了黄金比如何"自我增殖"。如果我们在黄金矩形中沿着一条边去掉一个正方形,则余下的矩形还是一个黄金矩形。这个过程可以无限地进行下去(参见插图)。



矩形 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_1C_1D_2$, $A_2B_1C_2D_3$ 和 $A_2B_2C_3D_3$ 都是黄金矩形。

直到20世纪初,黄金分割还不断出现在西方艺术的风景画所用的比例当中。当然,出现这种黄金分割是人为的结果。值得注意的是,黄金分割也常常在自然界中出现。

用一个数来表示黄金分割有时候是很方便的。构成黄金分割的长度的比所确定的数值常常用希腊符号 ϕ 或者 phi(读作 FEE)表示,它约等于1.618,是个无理数。这里我们给出几个可以发现 ϕ 的地方:

- 对于一个健康的成年人来讲,身高与肚脐距地的垂直距离之比非常接近黄金分割,肚脐距地的垂直距离与肚脐到头顶的距离之比也是如此。(对于正在发育的年轻人来说,这个比不太接近黄金分割。)
- 广为人知的斐波那契(Fibonacci)数列与黄金分割有紧密的联系。
- 植物的茎、叶、种子常常以产生黄金分割的方式生长分布。从吸收最多阳光且相互产生最少阴影的意义上来讲,茎和叶的这种黄金分割或者说黄金比的结构是"最优的"。(这一事实的数学证明完成于20世纪晚期。)
- 我们可以在许多动物犄角或螺旋贝壳上找到一种形态,具有这种形态的曲线称为对数螺线,它与黄金分割有紧密的联系。(但是,若再证实这些,就会离希腊几何学的历史太远了。)

当我们对黄金分割了解得更多时,就能够明白:从黄金分割常常作为天然形式及人造形式的组织原则的意义上来讲,可以看到艺术、数学及自然是如何相互反映的。它反映出数学同物质世界之间有着惊人的联系。

和更多的“黄金分割”的例子。类似地，如果我们延长围绕原五角星形的五边形的边，便可以得到一个新的、更大的五角星形，其中也有很多“黄金分割”的例子。这个过程可以无限地进行下去。

“黄金分割”是毕达哥拉斯学派的一个重要发现。虽然他们使用五角星形作为自己学派的特殊标志，但是他们并没有独占这个比例。希腊的建筑师们将“黄金分割”纳入到他们设计的建筑的诸多比例当中，希腊艺术所用的诸多比例中也出现过“黄金分割”，自然界之中同样也遍及“黄金分割”(参见阴影部分“黄金分割”)。在过去几千年的历史中，人们发现了许多有关这个比例的奇怪性质，这些性质的发现对于相信“数是自然界的基石”的毕达哥拉斯学派来说影响深远。

雅典的几何学

当提到希腊时，人们一般都会想到雅典，也就是现在希腊的首都。和许多漂亮的遗址一样，帕提侬神庙也坐落在雅典。如果我们往稍大范围考虑古希腊的话，或许想象到它包括现在的整个希腊。它比古代雅典的城邦所占的面积大得多，但却远远赶不上“大希腊”(Magna Graecia)——希腊人曾经居住的区域。希腊人的足迹已经超出了“大希腊”。希腊的数学家也不例外，他们游历的地方也很远。如前所述，毕达哥拉斯游历广泛，最终定居在东南海岸的希腊城市克罗托纳(今克罗托内，位于意大利境内)。我们除了知道泰勒斯喜欢旅行之外，对他的习惯知之甚少。人们常常称阿基米德(Archimedes)是历史上最伟大的数学家之一，他曾经在埃及的亚历山大接受过教育，生活在希腊的城邦叙拉古(Syracuse，位于

今意大利的西西里岛)。欧多克索斯(Eudoxus,约公元前408年—前355年)出生于现今的土耳其,曾经在雅典生活了一段时间,但最终还是回到了土耳其。许多著名的希腊数学家在成年后的大部分时间里都生活在亚历山大,只有少数数学家生活在现今的希腊。

虽然雅典不是许多数学家的故乡,只有少数数学家生活在那里,但这个地方好像是古希腊三大著名几何问题的诞生地。第一个是倍立方体的问题,它最初开始于一场可怕的天灾。公元前430年左右,雅典居民大量死去,绝望中的人们到当时居住在提洛岛(Delos)的、在希腊世界里享有盛誉的神谕那里去寻求帮助。神谕建议他们修建一个比庙里现有的祭坛大一倍的新祭坛献给太阳神阿波罗,要求新祭坛是个立方体形状的(为了正确地理解这个数学问题,请大家回忆:如果用字母 l 表示立方体的边长,则其体积可以简单地表示为 $l \times l \times l$ 或者 l^3)。那些雅典人赶紧接受神谕的忠告,建造了一个边长为原边长两倍的立方体形祭坛。可是,他们犯了一个错误,新祭坛的高度是原来的两倍,因而宽和长都是原来的两倍。所以新祭坛的大小,或者说体积,就是 $(2l) \times (2l) \times (2l)$ 或 $8l^3$。因此,新祭坛的大小不是原来的两倍,而是八倍。从这个不幸的事件中产生了古希腊三大著名的几何问题之一:给定一个立方体,用直尺和圆规作一条线段,使得以它为边的立方体的体积为原立方体体积的两倍。换句话说,即仅使用直尺和圆规作出一个立方体,使其体积为给定立方体体积的两倍。

大约在同一个时期,在雅典又有另外两个问题提了出来。一个是关于将任意角三等分的问题:给定任意一个角,仅使用直尺和圆规将其分成相等的三个部分。另一个问题对我们的语言都产生了影响,你或许听到过人们谈论某些事情不可能完成时会说“化圆

为方”。这个短语概述了第三个著名问题:给定一个圆,仅使用直尺和圆规作一个正方形,使之与给定的圆有相同的面积。

我们可以看到:上述这三个问题的共同点是寻求一种仅用直尺和圆规的解法,这个限制条件是非常关键的。例如,倍立方体问题很快被希腊数学家阿尔希塔斯(Archytas of Tarentum,约公元前428年—前347年)解决。但是,他的方法需要处理三个弯曲曲面,是一种技巧性极强,但十分漂亮的解法,需要在三维情形里解决。阿尔希塔斯的解法不能仅仅用直尺和圆规来完成,但是对于希腊人来说,仅用那两个简单的工具应该是能解决倍立方体问题的。因而,它的确是希腊人要下决心去解决的智力题。另外两个问题也是如此。

两千多年来,这三个问题一直吸引着数学家们的注意力。但它们从来没有从几何学上获得解决,因为仅用直尺和圆规是不可能解决的。这跟说“解法还没有找到”是完全不同的。找不到解法是因为它不存在。人们通过使用19世纪发展起来的一种新型的、强有力的代数,发现了这个惊人的事实。

当然,雅典除了是三大著名几何问题的发源地之外,还是众多哲学家的故乡。例如:苏格拉底(Socrates,约公元前469年—前399年)是雅典人,但他对数学科学没有太多贡献。下面是他关于数学的评价:

> 我始终不能使自己满意,为什么当1加上1时就变成了2,或者当把两个1做加法时就产生了2。
>
> (*Plato*. Phaedo. *Translated by Benjamin Fowett*, *New York*, *Oxford University Press*, *1892*.)

既然苏格拉底不能让自己相信 1 加 1 等于 2,我们自然不会对他在数学上没有作出太多贡献感到奇怪。

苏格拉底的学生柏拉图(Plato)热爱数学,他显然从毕达哥拉斯学派那里学到了数学知识。毕达哥拉斯去世后,克罗托内的毕达哥拉斯学派成员受到攻击,许多人被杀死。剩下的门徒都分散在大希腊,他们对在克罗托内的数学发现后来也不再保密了。毕达哥拉斯学派的数学知识深深影响了柏拉图。最后,柏拉图在雅典建立了自己的学派,并鼓励自己学派的弟子学习数学。柏拉图本人称不上是位数学家,但他的其中一个学生——欧多克索斯,成为同代人中第一流的数学家。

为了学习技艺,欧多克索斯游历广泛。如前所述,他的故乡在尼多斯(Cnidus,位于今土耳其境内)。欧多克索斯起初是阿尔希塔斯的学生,后来成了阿尔希塔斯的朋友柏拉图的学生。(事实上,雅典对于搞哲学的人来说是个危险的地方,当柏拉图在雅典要被处死时,在阿尔希塔斯的帮助下才挽救了他的生命。)后来,欧多克索斯离开了雅典,在基齐库斯(Cyzicus,位于今土耳其境内)那个地方建立了自己的学派。他是一位著名的数学家,也是一位著名的天文学家。在几何学方面,欧多克索斯发明了现在称为穷竭法的方法,它是对数学的深刻的理解,在数学之外也有许多应用。他的方法使希腊人解决了前人不能解决的许多问题。穷竭法对应于希腊数学里的极限思想,它是两千多年后所创立的微积分学中蕴涵的主要思想。

蕴涵在穷竭法背后的想法,就是我们可以通过一连串有限的步骤得出我们的答案。步骤越多,就越接近我们的答案。穷竭法不是求出精确答案的一个公式,而是描述了一个一般的准则,即一

个成功的公式或步骤必须满足的条件,使得我们的步骤能够逼近我们所要求的答案。通过设计特定的步骤,可能用五步便很接近我们的答案,也可能需要重复一千步才足够接近(我们自己决定"足够接近"的含义)想要的答案。此外,或许我们的步骤永远也不可能恰好产生我们想要的答案。但重要的是,穷竭法能够保证:如果我们能够重复足够多步的话,精确解同我们的近似解之差可以和我们所要求的一样小。穷竭法对希腊数学后继发展的影响是极其深远的。

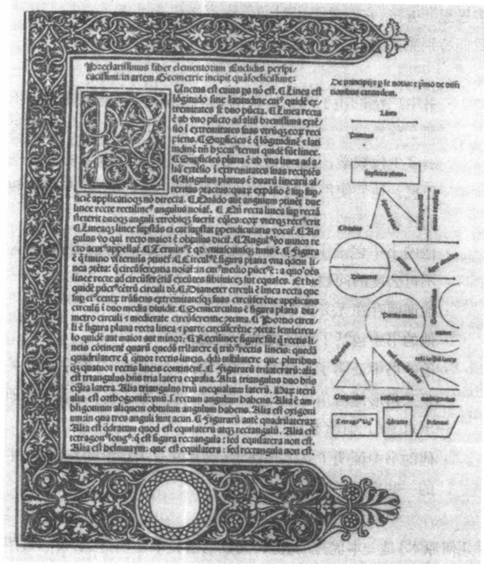
第三章 希腊重要的几何学著作

《几何原本》，亚历山大的欧几里得著

欧几里得是历史上最著名的数学家之一，或者更准确地说，"欧几里得"是数学史上最有名的名字之一。关于他本人的几乎其他所有的事情都是秘密。我们仅仅知道：公元前300年左右，他在亚历山大（位于今埃及境内）努力钻研数学。至于其生卒时间不得而知，也不知道其生于何处。我们之所以称其为亚历山大的欧几里得，是因为他在那里的博物院工作过，那里的学派和图书馆吸引了希腊许多最优秀的数学家。

我们知道欧几里得写了许多著作，但仅有少数流传下来，其中最著名的一本著作是《几何原本》。它一直是最畅销、译本最多、最具有影响力的数学著作。然而，书中的定理或者证明很少（可能没有一个）是欧几里得自己发现的。几乎可以肯定，《几何原本》中的一些结果是欧多克索斯发现的，但是书中绝大部分内容不知道应该归功于谁，因为欧几里得没有注明。《几何原本》中叙述的绝大部分结果（甚至所有结果）可能都已经为他的同时代数学家所熟知。此外，欧几里得从来没有称这种几何学是"欧氏的"。尽管如

此，欧几里得的书中叙述的这种几何学现在被称为欧氏几何。



Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quam foelicissime:

1482 年版的欧几里得的《几何原本》扉页。(Library of Congress, Prints and Photographs Division)

《几何原本》的影响很广，那是因为与其说它是数学研究的指南，还不如说它是一本教科书。它被编纂成 13 卷(或者说章)。第

一卷是绪论，主要介绍了几何学的基本原理；其余 12 卷综述了许多思想和方法，它们对于当时的数学家来说是非常重要的。其中我们特别感兴趣的是下列几条：

- 书中广泛论述了现在所谓的几何代数学，虽然欧几里得不那么称呼它。（在欧几里得所处的那个时代，希腊人没有发展多少代数学，但是他们需要用到我们用代数表示的那些思想。他们使用几何学的语言表述这些思想，而不是用我们比较熟悉的代数符号。）
- 他的书中包括了现在称为无理数的内容，欧几里得称之为不可公度的问题。
- 他证明存在无穷多个素数。
- 他的书中包括了欧多克索斯的穷竭法。
- 他的书中证明了平面几何学中的许多定理。（本书前面关于三角形的内角之和等于两直角之和的证明，或多或少地出自于《几何原本》。）
- 他的书中证明了立体几何学（或者说三维对象的几何学）中的一些定理。

《几何原本》是一本优秀的、值得阅读的教科书。（有些学校一直用欧几里得的著作作为教材，甚至到现在，许多平面几何教材都是模仿《几何原本》中的部分内容编纂而成。）

欧几里得的著作之所以重要，原因之一就是它流传了下来，而其他许多著作却没有流传下来，因而它是我们对希腊几何思想的最好一瞥。它是经过精雕细琢和悉心创作出来的，包含了希腊人

非常重视的许多思想方法和定理。然而,欧几里得著作的最重要之处——它影响了许多代数学家和科学家的原因——在于欧几里得研究几何学的方法。《几何原本》是迄今为止流传下来的、最早使用现在称为公理化的方法研究数学的典范。现在,所有的数学分支都使用此方法,欧几里得的著作在两千年前就树立了这个标准。

我们在前面提到第一个希腊数学家——泰勒斯——证明了几何学中的新结果时,我们并没有细致地审视那些东西,或许泰勒斯本人也没有。在几何学的研究中,我们从先前已知的结论出发,通过演绎推理发现了新的结果,也就是从一个结果经过逻辑推导得出另一个结果。但是,当我们证明新的几何结论时,我们怎么知道前面的论述——即我们用来证明新结果的那些论述——也是正确的呢?如果你跟小孩儿在一起相处的时间稍长一些,那么几乎可以肯定地说,你曾遇到过这种对话,即小孩问你一个问题,你回答了,然后小孩又问“为什么?”那个时候你就知道自己是无处可逃了。总是那种套路:你先回答了第一个为什么,小孩又问“为什么?”然后一而再、再而三地问下去。每一个答案都会使你远离最初的问题,但是由于没有最终的答案,你永远都不能满足小孩的好奇心。

不仅儿童对得到的答案总不满足,不断地问为什么,希腊早期的数学家们也面临着一系列无穷尽的、不能令人满意的答案。他们想要的是研究几何学的一种逻辑方法,但是他们发现的却是一连串的、无穷尽的逻辑推演。他们能够证明条件 C 是条件 B 的逻辑结果;条件 B 是条件 A 的逻辑结果;但是为什么条件 A 是正确的呢?对于儿童来讲,这种情况是令人绝望的。对于数学家来讲,

他们似乎也会感到绝望,但事实并非如此。欧几里得知道应该怎样解决。

在《几何原本》的第一卷第一节中,欧几里得在开头给出了一个很长的定义表——数学专用词汇表,然后给出了一个简短的公理和公设表。欧几里得将公理与公设置于著作的开头,是因为它们对于他所喜爱的学科来说太重要了,它们是欧几里得几何学的基石(欧几里得对公理和公设加以区分,他认为前者非常明显且具有普遍性,而后者的适用范围要狭窄一些。然而,公理和公设起同样的作用,现在的数学家对两者不作区分)。欧几里得列出了五个公理和五个公设。他断言这十条性质毫无遗漏地构成了现在称为欧氏几何的基本特征。公理与公设假定是正确的,它们不需要证明。事实上,在欧几里得的几何学中,它们不能被证明是正确的还是错误的,原因在于公理和公设决定了这种几何学是什么。公理与公设就像游戏的规则一样,如果改变了它们就改变了几何本身。它们是"这为什么是正确的"这一问题的最终答案。欧氏几何中任何正确的陈述都是正确的,因为它最终总是一个或多个欧几里得公理或公设的逻辑结果。

欧几里得的目标是雄心勃勃的。任何一个公理和公设的集合都必须满足特定的准则。首先,公理之间不能相互矛盾,否则我们会找到一个语句既能被证明是正确的又能被证明是错误的(防止这种情况出现是非常重要的)。第二,公理和公设必须在逻辑上是独立的,即没有哪个公理或公设是其他公理或公设的逻辑结果(我们不希望由一个公理推出另一个公理)。最后,任何公理或公设的集合必须是完备的,即所有的定理必须是我们的公理和公设的逻辑结果。找到满足这些条件的一组公理需要的技巧要比我们想象

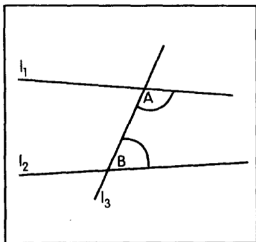
的要复杂得多。

这种非常形式的、非常逻辑的几何方法使得希腊几何学不同于先前的任何几何学。希腊人引进了“什么是数学真理”的新思想。对于欧几里得来说(以及所有后继的几何学家来说),检验某个东西是否是正确的,不是看结果是否与我们的感觉一致,而是看该语句是否是刻画这个系统的公理和公设的逻辑结果。以这种方式研究数学,一旦建立起一组完备的、相容的公理,几何发现的过程就仅仅是从公理、公设及已经发现的结果来推演出未知的逻辑结果了。换言之,欧几里得的目标是将几何学变为一门纯粹的演绎科学。

欧氏几何中绝大部分公理和公设是以一种直接易懂的方式陈述的,接下来的几代数学家对欧几里得所选择的大部分公理和公设是满意的。例如,欧几里得的其中一个公理是“整体大于部分”,其中一个公设是“任何两点都可以确定一条直线”。在十个公理和公设中,有九个都是简洁且不言而喻的,第五公设则是个例外。在第五公设中,欧几里得解释了两条不平行直线相交的条件,人们也称它为平行公设。这个公设引发了两千多年的争论。

关于第五公设的争论,部分原因是因为叙述上的复杂性。第五公设的内容如下:

> 若一条截线与另外两条直线相交,且在截线某一侧的两个内角之和小于两直角,则两条直线在该侧相交。
>
> (*Euclid*. Elements. *Translated by Sir Thomas L. Heath*. Great Books of the Western World. *Vol. 11*. *Chicago*: *Encyclopaedia Britannica*, *1952*.)



第五公设的内容如下：如果角 A 和角 B 之和小于 180°，则线 l_1 和 l_2 将在角 A 和角 B 所在 l_3 的那一侧相交。

请参见插图，它表明了此公设所述的内容。与其他公理及公设相比，第五公设让许多人感到出奇的复杂。几乎从一开始，就有许多数学家认为：第五公设能够从其余四个公设以及五个公理中演绎出来。如果真是那样的话——如果那些数学家是正确的——则第五公设根本不能称为公设。它将是其余九个公理和公设的推论。如果是这样的话，从逻辑上讲，第五公设是多余的，它也不再是欧氏几何的一个基本性质。

几个世纪以来，数学家们一直在研究第五公设同欧几里得的其他公理和公设之间的关系。许多数学家曾经"证明"平行公设是其他公理和公设的推论，但是仔细检查一下就能发现每个证明都有纰漏。就像各地数学家鞋子里的小石子一样，第五公设一直是令数学家烦恼的根源。然而，在其后的二十多个世纪，欧几里得对几何学的表述还是占据着数学思想的统治地位。

欧几里得试图将几何学公理化——即他尝试着去建立一个逻辑上相容且完备的一组"规则"，使得欧氏几何学的全部内容都可以从中演绎出来。他几乎得到了正确的理论，而且他关于第五公设的工作也是对的。他的平行公设不是其他公理和公设的逻辑推论。但是，欧几里得的十个公理和公设并不是十分完备的。在著

重新审视欧几里得

到19世纪末，数学家们已经发现了许多不同于欧几里得所描述的几何学。其中某些几何学是与我们的直觉相悖的；换言之，虽然这些几何学没有违背数学法则，但我们关于空间和形式的通常观念对于理解它们帮助不大。代数学在19世纪也变得高度抽象了。正是在那个时候，许多数学家才开始认识到将所有数学分支公理化的重要性，他们的目标是确保所有的数学问题都有严格的数学答案（与我们的常识相对照）。

德国的数学家希尔伯特（David Hilbert，1862—1943）是上述方法最著名的倡导者之一。19世纪晚期，希尔伯特将其非凡的智慧投向欧几里得的著作。他指出了《几何原本》中的多处逻辑缺陷，其中绝大多数缺陷欧几里得可能从来没有意识到，其原因在于公元前300年左右，亚历山大的数学和逻辑还不够发达，不足以使这些缺陷显现出来。希尔伯特重新阐述了欧几里得给出的定义，并且指出用21条公理来替换欧几里得的五个公理以及五个公设。这些新公理会使欧氏几何在逻辑上不仅是相容的，而且是完备的。虽然这个公理表中包括一个与欧几里得的平行公设类似的公理，但是其他的某些公理所提出的问题可能会使欧几里得感到有些吃惊。例如，在希尔伯特的21条公理中，有5条是与“顺序”相关的，像“直线上任意三个点，总有且仅有一个点位于另外两个点之间”（*Hilbert, David.* Foundations of Geometry. *Translated by E. J. Townsend, Chicago: Open Court Publishing Company, 1902*）。你是否觉得这看起来十

分显然？下面这条公理也是与“顺序”相关的公理：“如果 A、B、C 是一条直线上的三个点，且 B 位于 A 和 C 之间，则 B 也位于 C 和 A 之间”（出处同上）。上述公理以及类似的公理表明了这样一个事实：在我们看来可能十分显然的某些东西，在逻辑上并不是必然的。事实上，如果没有这些公理的话，希尔伯特对欧氏几何的表述在逻辑上是不完备的。经历了两千多年的时间，直至 1899 年希尔伯特的《几何学基础》（*Foundations of Geometry*）出版，欧氏几何最终在逻辑上才是相容的。

作中的某些地方，欧几里得假定了某些性质是正确的，即使那些性质不能像他想象的那样能从几何学中演绎出来。这些错误不是什么大错，而且也不是特别“明显”。事实上，直到 19 世纪晚期，当数学家们发现了其他类型的几何学并用远比古希腊人严格的、挑剔的眼光来审视这些内容时，欧几里得的错误才最终被人们指出来并得以纠正。

尽管有这些疏漏，但欧几里得以及大希腊的其他数学家所做的工作仍是数学上取得的巨大成就。一直到近代之前，只有几何学达到了这种严格水平。例如，代数学里的各个学科直到 19 世纪晚期、20 世纪早期才实现了公理化，概率论直到 20 世纪才实现了公理化。当一门数学学科可以用一组定义和公理以及由公理和定义推导出的一组定理来表示时，数学真理就变得严格可检验了。这便是欧几里得最深刻的洞见。

阿基米德的《方法》《论球与圆柱》及其他著作

欧几里得的《几何原本》对希腊数学产生了重大影响，而且几千年来一直影响着数学思想的方向和重点。但是，我们不能如此去评价叙拉古的阿基米德(Archimedes，约公元前287年—前212年)。虽然阿基米德的一些成果变得广为人知，它们出现在希腊、伊斯兰以及欧洲的文化中，但他的大部分著作显然是因为技巧性太强而难于吸引人们太多的注意。现在的情形迥然不同了。阿基米德解决的许多问题，通常在微积分课上就可以用常规的方法解决。那些问题之所以在如此长的时间内难以解答，其原因是：阿基米德在解决它们时，并没有精心地设计符号，提炼解决问题的技巧，阐述其中一些甚至具有微积分特征的思想方法。当我们阅读阿基米德的著作时，看到的是超凡的数学智慧和付出巨大努力的结果。在古代最为超前，也是最为出名的著作中，阿基米德的数学研究著作位列其中。

历史上有许多描述阿基米德的生平及其成就的记载。我们知道：阿基米德生于希腊的城邦叙拉古，现位于意大利境内的西西里岛。他显然在亚历山大接受过教育，可能受教于欧几里得的学生。后来，他回到家乡，在那里度过了自己的余生。他同亚历山大杰出的数学家交流自己的数学发现，其中包括塞利尼的埃拉托斯尼(Eratosthenes of Cyrene)，这位数学家以计算地球的周长而出名。

许多关于阿基米德的记载都提到，他是一个完全沉迷于数学及科学研究的人。一个老生常谈的故事是说阿基米德不愿花时间

去洗澡,他宁愿把所有的时间都用在数学研究上。当朋友强迫他去洗澡时,他还在用手指画图并集中思考图中所表示的内容。阿基米德设计战争武器的天分给他在叙拉古的同伴们留下很深的印象。他学到的物理知识以及设计简单机械的技能能够使他发明战争武器,进而帮助叙拉古的人们抵御罗马军队的入侵(当叙拉古城遭受到罗马军队的攻击时,阿基米德已年老)。他设计的武器阻止了罗马人凭借军事力量征服叙拉古,这也使得罗马人围攻叙拉古达两年之久。最后,罗马人用诡计攻占了叙拉古,阿基米德在城池陷落时被杀害。

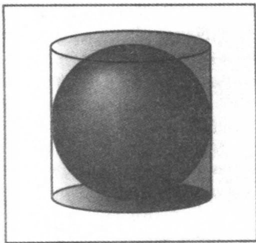
在罗马人从叙拉古掠夺的战利品中,有阿基米德设计的关于太阳系运动的日心模型——其理论由希腊萨摩斯(Samos)的天文学家阿利斯塔克(Aristarchus)提出。阿基米德的装置甚至能够演示日食和月食是如何发生的。虽然阿基米德的主要兴趣在几何学上,但是他显然乐于设计和制造能够展示科学思想及原理的物体。

阿基米德的数学著作几乎全部失传了。我们主要通过唯一一本幸存到16世纪的著作,才了解到古希腊的原著。《方法》(*The Method*)是他最著名的著作之一,直到很久以后才被人们重新发现。现代学者首次见到《方法》是在1906年,当时在君士坦丁堡(现在土耳其境内的伊斯坦布尔)的图书馆发现了这部著作以及人们已知的阿基米德的其他著作。《方法》一直存放在那里未引起人们的注意,这差不多有一千年的光景了。但是,它保存得并不好。10世纪时,有人曾想将整部著作擦掉,然后抄写宗教作品替代上面的数学内容。幸运的是,它没有被彻底擦掉,阿基米德所做的大部分工作被人们重新发现了。

44　ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥ
ΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

阿基米德的论文中的一页，它是用希腊文写的，发表于1544年。(Library of Congress, Prints and Photographs Division)



阿基米德证明了球的体积是包含它的最小圆柱的体积的三分之二。

在阿基米德的所有数学发现中，他最喜爱的结果包含在两卷本的著作《论球与圆柱》(*On the Sphere and Cylinder*)之中。在这部著作中，阿基米德证明了球的体积是包含它的最小圆柱的体积的三分之二(参见插图)。这是个很重要的结果。因为柱体的体积公式是已知的，它等于底面积乘以高。阿基米德对这个发现非常引以为豪，以至于要求将象征这个发现的图刻在自己的墓碑上。我们知道后来的事情的确如此，因为一个多世纪之后罗马的作家、政治家西塞罗(Marcus Tullius Cicero)访问叙拉古时发现了阿基米德的坟墓，它被人们遗忘了，上面长满了杂草，西塞罗重新修筑了它。

除了研究三维形体之外，阿基米德还研究曲线。他曾经写过一本完整的专著，其题目为《论螺线》(*On Spirals*)。下面就让我们来看看他是如何刻画螺线的：

> 如果平面上的一条射线围绕其中一个保持固定的端点匀速旋转，并且返回到原位置，与此同时，如果射线上的一点从该端点出发沿射线匀速运动(假设整个过程中该端点保持固定)，则这个点在平面上画出一条螺线。
>
> (*Archimedes*. On Spirals. *Translated by Sir Thomas L. Heath*.

Great Books of the Western World. *Vol. 11. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1952.*)

关于阿基米德选择的问题以及对它们的论述，有几处重要的地方需要注意。首先，阿基米德只认识很少的曲线，所有希腊人都是如此。虽然用一本书的篇幅来研究螺线会让人们感到有点儿多余，但是我们要记住：阿基米德大约只有十二种曲线可供选择研究。这本书论述了希腊人所知曲线中的重要曲线。第二，请大家注意阿基米德对曲线的描述是机械式的。他是在描述一个物理过程，这会让读者画出一条螺线来。他的著作中没有符号，也没有方程，这同现在的方法形成了鲜明的对比。现在，我们一般用方程来定义曲线。阿基米德的方法则是非常费力的。

阿基米德不使用代数，所以他的描述方法显得十分笨拙。希腊人对代数学几乎没有兴趣。我们能够轻而易举地创造出新的曲线，这主要归功于我们熟悉代数。对于希腊人来讲，几乎描述任何一条曲线都是一次挑战。我们从上面冗长的定义可以看出：甚至对于历史上最伟大的数学家之一的阿基米德来说，一条简单的螺线都需要很长的、不太容易理解的方法来描述。

在《论螺线》一书中，阿基米德发现了有关此类曲线的几个性质。例如，绕一整圈之后由螺线和射线围成的面积，是以"端点"到射线上绕一整周后的点的距离为半径的圆面积的三分之一。他进而证明了许多类似的结果。他还能用螺线去解决经典的三等分任意角的问题，但是由于他的解法不能仅仅靠直尺和圆规来完成，所以他没有能够成功地解决该问题。

阿基米德还对计算各种各样的面积感兴趣，这样的问题对于

数学及物理极其重要。在《抛物线求积》(*Quadrature of the Parabola*)一书中,他求出了由直线和抛物线所围成的面积。为了解决此问题,他使用了穷竭法,这种思想是微积分的前兆。虽然欧多克索斯发明了穷竭法,但阿基米德是使用此方法来获得新结果的古代数学家中技巧最为娴熟的一个,他在自己的许多著作里反复使用此方法。

阿基米德是一个多产的、富有创造力的数学家,但许多人,甚至是数学家,发现读他的数学著作总会感到不解,主要的问题在于阿基米德的几何著作非常简洁。在解释自己所做的工作方面,他给读者提供的信息很少。因而,我们常常不知道阿基米德是怎样完成了计算,也不知道他是怎样得到的想法。这也是许多人对《方法》感兴趣的原因。阿基米德在《方法》中道出了他开始研究一个问题的方式。《方法》并不是通常意义上的数学著作。它不是由定理和证明堆砌而成,而是阿基米德自己在解释如下的内容:在试图从数学的角度证明一个想法之前,他是如何着手研究这个想法的。我们从那里可以明白阿基米德对力学及几何学的兴趣是如何形成的。

阿基米德想象几何形状都有质量,然后再设想使之平衡。在确定了平衡点之后,他就可以用已知的图形面积或体积与待研究的图形进行比较。这便是“思想实验”。虽然它们不能代替数学上严格的论证,但是它们的确让我们深刻地理解了阿基米德的研究方法。作者撰写《方法》一书的原因也是试图鼓舞他的同时代人以及后人进行数学研究。下面是阿基米德本人解释撰写《方法》的原因:

我之所以认为有必要详细说明自己的研究方法，虽然部分原因是我已经说过这些而不想让它们成为无用的废话，但也同样因为我确信它们会对数学有不小的作用；我担心有些人，不管是我的同时代人还是后继者，会用得着这些方法。一旦他们学会了，就会应用这些方法去发现我还不知道的其他定理。

(*Archimedes*. The Method. *Translated by Sir Thomas L. Heath*. Great Books of the Western World. *Vol. 11*. *Chicago*: *Encyclopaedia Britannica*, *1952*.)

不幸的是，当20世纪早期人们重新发现《方法》时，数学已经大踏步地前进了，阿基米德的愿望基本上没有实现。

《圆锥曲线论》，佩尔格的阿波罗尼奥斯著

我们对佩尔格(Perga)的阿波罗尼奥斯(Apollonius，约公元前262年—前190年)的生平知之甚少。阿波罗尼奥斯出生于佩尔格(位于今土耳其境内)。他曾经在埃及的亚历山大接受过教育，可能受教于欧几里得的学生。他年轻时可能执教于亚历山大的大学。最后，他移居到了帕加马(Pergamum，现位于土耳其境内的贝加盟(Bergama)城)。帕加马当时是最繁荣和最富有文化气息的城市之一，拥有与亚历山大相媲美的大学和图书馆，阿波罗尼奥斯正是在那里教书。显然他把帕加马当成了自己永久定居的地方。帕加马是个繁荣和精心规划的城市，它建在一座山上，从那里可以鸟

APOLLONII PERGÆI

CONICORUM

LIBRI OCTO,

ET

SERENI ANTISSENSIS

DE SECTIONE

CYLINDRI & CONI

LIBRI DUO.



OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO, An. Dom. MDCCX.

阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》(*Conicorum*,1704 年出版)的扉页。(Library of Congress, Prints and Photographs Division)

瞰广袤的平原。除了极好的图书馆和大学之外，人们还在山边建了一个大剧场。那里一定十分美丽。

阿波罗尼奥斯的同时代人称他是“伟大的几何学家”。现在，虽然随着岁月的流逝他的所有数学著作几乎都遗失了，但人们仍把他看作是伟大的几何学家。我们知道他的许多著作的名字，但对其中的内容知之甚少，因为那个时代的许多作者都提到过他失传的诸多著作。阿波罗尼奥斯有两部著作流传到了现在，即《圆锥曲线论》(*Conicorum*)和《截取线段成定比》(*Cutting-off a Ratio*)。《圆锥曲线论》是一部重要的数学著作，共有八卷，前七卷保存了下来。正是从那里，我们才能看到阿波罗尼奥斯是个多么出色的数学家。

在《圆锥曲线论》中，阿波罗尼奥斯首先总结了包括欧几里得在内的前人的工作。接下来他突然发力，用富有创造性的方法解决难题。他对问题的分析不仅细致入微，而且全面彻底。有时候他对相同的问题给出了多种解法，每种解法都是从不同侧面对问题本质的深刻理解。阿波罗尼奥斯在其著作中论述的发现，影响数学家的思想和研究达许多个世纪之久。

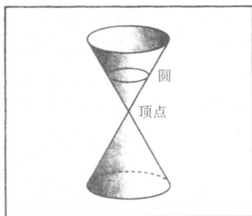
什么是圆锥？或者更为准确地说，什么是圆锥曲面呢？阿波罗尼奥斯对此是这样论述的：

> 如果一条直线过一点与一个圆周连接，满足圆周与点不在同一个平面内，且此直线可以沿两个方向延伸，假设这个点保持固定不动，当直线沿着圆周旋转一圈回到原来的位置时，就会生成一个由两个正对的曲面所构成的曲面，当生成直线无限延伸时两个曲面也都无限延伸，我称其为圆锥曲面。

(*Apollonius*. Conics. Encyclopaedia Britannica, *1st ed.*, *s. v.* "*Great Books of the Western World*".)

请大家注意这样一个事实:阿波罗尼奥斯对圆锥曲面的描述是文字叙述,即他完全是用平铺直叙的语句来表达自己的思想。他根本不使用代数符号。虽然使用代数符号必然会简单易行地描述出圆锥曲线,但两千多年来人们也没有创造出这些符号。因为阿波罗尼奥斯的描述是文字叙述,所以现代读者理解起来并不是特别容易。

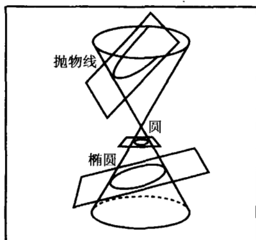
为了正确理解阿波罗尼奥斯所描述的那类曲面,我们先来看看用比较现代的方法所描述的一种特殊的圆锥曲面——正圆锥曲面:想象位于圆心正下方的一点。再想象一条过这点且与圆周连接的直线。这个点保持固定不动,直线以这个点为轴。为了画出圆锥,移动这条直线并使之与圆周保持接触。当直线围绕圆周运动时,就会在空间描绘出一个形状,它与在顶点相接的两个非常高的冰淇淋蛋卷筒的形状相似。这便是圆锥。两个锥体相连的那个点称为圆锥的顶点。这个图形关于过轴点及圆心的直线对称,该直线称为圆锥的对称轴(参见插图)。



阿波罗尼奥斯的生成圆锥的方法构造出了两个在顶点相连的锥体,它们具有相同的对称轴。

阿波罗尼奥斯从他的圆锥曲面中得到了三种重要的

曲线：椭圆、双曲线和抛物线。他写作该书的主要原因是要发掘这些曲线——每一种曲线都称为圆锥曲线——的性质。他用平面同圆锥曲面的交来描述每种曲线，或者我们可以把平面想象成一种可以直接去截圆锥的工具。在这种情况下，曲线便是我们截圆锥曲面得来的。我们从一个平面去截一个圆锥曲面出发，让平面垂直于圆锥曲线的对称轴，由此便得到一个圆。然而，当稍微倾斜一下平面再去截圆锥曲面时，便得到了一个椭圆。平面越是倾斜，椭圆越是拉长。如果一直倾斜平面直至它与生成圆锥曲面的直线平行，但不通过顶点，那么就会得到一条沿着上圆锥或下圆锥的方向无限延长的曲线，我们称之为抛物线。最后，如果继续倾斜平面，使它同时去截上下两个圆锥——同样是不过顶点——我们称所得到的曲线为双曲线。这些曲线的命名也都归功于阿波罗尼奥斯。



圆锥曲线可以用一个双锥体和一个平面的交来表示。

阿波罗尼奥斯的数学发现十分重要，其原因之一是：他发现了这三种基本曲线的许多性质。因为希腊人仅仅知道大约十二种曲线，而阿波罗尼奥斯研究了当时所知曲线中大约四分之一的曲线。此外，阿波罗尼奥斯的分析是非常透彻的。他关于圆锥曲线的工作在同类工作中保持了好几个世纪的领先地位。阿波罗尼奥斯对圆锥曲线的分析被证明是十分重要的，追溯一下另外的一个原因

圆锥曲线的研究

在他的多卷集论著《圆锥曲线论》中，阿波罗尼奥斯研究了三种曲线：双曲线、抛物线和椭圆。它们是人们已知的最简单的一些曲线，而阿波罗尼奥斯却用了八卷来讲述它们的性质。这怎么可能呢？

《圆锥曲线论》之所以长的其中一个原因在于阿波罗尼奥斯用综合的方法来论述，即他不使用代数。书中的插图有助于阐明他的思想，但从现代的标准来看，如果不使用代数，就会使里面的阐述变得冗长繁复。对于阿波罗尼奥斯来讲，用一页或两页的篇幅去证明一个甚至非常简单的命题一点儿也不奇怪（当然，说那些命题简单是用现在的标准。当数学家们学会使用代数知识来解决几何问题之后，一度向专业数学家挑战的问题都可以作为中学生的家庭作业了）。

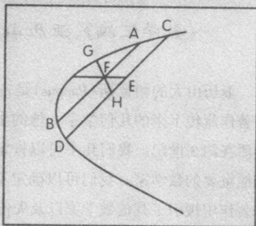
《圆锥曲线论》非常长的另外一个原因是阿波罗尼奥斯对这个主题的分析是相当详尽的。他仔细地考虑了大量的性质，他的许多定理以及大部分证明技巧性都太强了，不适合写在此处。但是为了体会阿波罗尼奥斯伟大著作的风格，我们列出命题28，还有它的图示，以及对阿波罗尼奥斯试图证明什么内容，这里给出现代的解释（不是证明）。

命题28（第二卷）

在一条圆锥曲线或一个圆周中，如果某条直线平分两条平行直线，则它是此曲线的直径。（原文引自：同上）

直径这个词用于圆时大家都知道其含义。当阿波罗尼奥斯将此词用于圆锥曲线时，他指的是此曲线的一条对称轴。

图示中的直线 *BFA* 和 *DEC* 是阿波罗尼奥斯在其定理中所提到的平行线。在数学家不能控制圆锥曲线的选取或者平行线的位置这一意义下，不妨假设圆锥曲线和两条平行线已经给出。还有一条直线数学家们不可以控制：过点 *E* 和 *F* 的那条直线。直线 *EF* 平分两直线 *BFA* 和 *DEC*。阿波罗尼奥斯的目标是要证明在这个位置的直线 *EF* 是上面那条圆锥曲线的直径。



阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》的第二卷中定理 28 的图示。

《圆锥曲线论》里全是上述类型的定理，如果读者对所有的这些努力成果持有什么疑问的话，阿波罗尼奥斯告诉我们：他认为具有深刻见解的数学证明是迷人的。他曾经说过：数学就是为了它自身而研究。

就是：圆锥曲线在接下来的几个世纪中对于科学以及数学都是极为重要的。例如，欧洲文艺复兴时期，开普勒(Johannes Kepler)正确地宣布了行星绕太阳运动的轨迹是个椭圆。在开普勒作出发现的同一时代，牛顿用抛物形的镜面制作成了反射望远镜。当然，阿波罗尼奥斯不知道这些应用。他研究圆锥曲线只是出于纯粹的几

何上的原因。他认为富有想象力的、理性的思维和艺术或音乐一样有趣和美丽。

《数学汇编》,亚历山大的帕普斯著

亚历山大的帕普斯(Pappus)是古希腊最后一位伟大的、有完整著作流传下来的几何学家。他的生卒年代不详,但我们知道他生活在约3世纪。我们几乎可以肯定:那个时期的亚历山大还有其他重要的数学家。我们可以确定不是帕普斯一人,那是因为他的著作中援引了其他数学家以及失传的数学论著。除了帕普斯写下来的内容之外,我们对其中提到的一些数学家及其著作一无所知。因此,我们很难给出帕普斯的著作在历史中的定位。大部分历史记载都遗失了。这也是帕普斯的主要著作——《数学汇编》(*Collection*)之所以重要的原因之一。帕普斯的《数学汇编》是古希腊尚存的、伟大的数学著作中距离我们年代最近的一部。

《数学汇编》共八卷,第一卷以及第二卷的前一部分已经失传。在保存下来的六卷半中,帕普斯谈到了古希腊数学中许多最重要的著作:欧几里得的《几何原本》,阿基米德的《论螺线》,阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》,以及希腊天文学家托勒密(Ptolemy)的著作,等等。帕普斯的研究工作是全面透彻的。一般来讲,他先介绍每一本重要的著作,然后叙述里面的内容。无疑,他希望读者伴随着他的评注去研读原著,但帕普斯并不满足于简单回顾那些著作。每当他感到有必要或适当时,他就会给出回顾的某些定理的另外证明。帕普斯毫不掩饰他对原著的改进,有时候他贡献出的显然是自己独到的新思想。对于帕普斯来讲,原著只是个开始,而不是

结束。

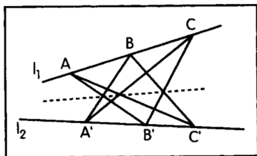
正是通过帕普斯的著作,我们才了解到阿基米德的一部著作。在这部遗失的著作中,阿基米德研究了现在称之为半正则立体的性质。半正则立体是三维的、具有高度对称性的几何形状。由此看来,帕普斯从阿基米德的著作中知道了这些对象,我们从帕普斯的著作中了解到这些内容。在希腊几何发展史的晚期,撰写关于其他著作的注释及评注成了司空见惯的事情。

帕普斯并不局限于写评注,他是个想象力极为丰富的数学家。同古希腊的许多数学前辈一样,他也对尚未解决的三大著名几何问题(即倍立方体、三等分任意角、化圆为方)感兴趣。帕普斯对每个问题都给出了解法。例如,他谈到了一种使用双曲线来三等分任意角的方法。因为这种方法不能仅用直尺和圆规来完成,所以它不是原问题的解,原问题要求读者只使用直尺和圆规。尽管如此,帕普斯可以在不限于直尺和圆规的情况下解决上述三个问题。事实上,他还知道并且谈到了这些问题的多种解法,虽然没有一种解法可以单独用直尺和圆规来完成。

从理论的角度来看,更为重要的是:帕普斯将几何问题分为三类不同的问题。他写道:"平面"问题是可以仅用直尺和圆规来完成的问题;"立体"问题(例如,三等分任意角),是可以使用圆锥曲线获解的问题。最后,他定义"线性"问题是除上面两类之外的问题。这些定义的重要性在于这样一个事实:帕普斯未经证明地陈述道,希腊尚未解决的三大著名几何问题不属于平面问题!换而言之,这些问题是不可解的。虽然他的直觉是正确的,但没有给出这种论断的证明。

现在,帕普斯的另外一个发现以帕普斯定理而著称。这个定

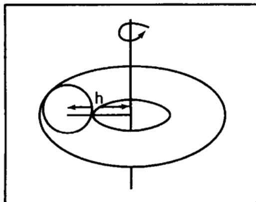
理吸引了此后一千多年来的几十代数学家，因为它很好地适合于多个几何分支，其思想是十分简单的。设想有两条直线，在每条直线上选择三个点。比如，我们可以在第一条直线 l_1 上用 A、B、C 表示它上面的三个点，在第二条直线 l_2 上用 A'、B'、C' 表示它上面的三个点(参见插图)。现在，将如下的点对连线：(A, C')、(C, A')、(A, B')、(B, A')、(B, C')、(C, B')。我们首先注意到的就是如下一个性质：无论怎样画直线 l_1、l_2，无论怎样选择 A、B、C 和 A'、B'、C'，我们刚才所画的线的交点都位于同一条直线上。上述性质的另外一种说法就是这三个交点共线。该问题中九个点、九条线的奇怪关系不是很明显。这九条线被归类到三个线的集合里，因为每个集合中的三条线交于同一个点。类似地，这九个点也被归类到三个点集里，每个集合中的三个点位于同一条直线上。这种在点的性质和线的性质之间惊人的对称性是"对偶性"的一个例子。请大家注意：如果我们将前面两句中的"点"和"线"、"相交"和"位于"互换，仍然可以得到一个正确的语句："每个点都位于三条线上"及"每条线都包含三个点"(反之亦然)。大约在帕普斯去世十五个世纪之后，对偶性被证明是射影几何学的发展中非常重要的概念，帕普斯的著作中包含了这一重要和惊人性质的最早例子之一。



解释帕普斯定理的图示。

帕普斯还作了其他几项观察，它们预示了几个世纪之后数学上的重大发现。我们在本章中不止一次谈到希腊人只研究了很少

一部分曲线。虽然他们已经知道圆、圆锥曲线、螺线,以及其他几种曲线,但在帕普斯之前他们还没有发现能够产生大量不同类型的曲线的方法。帕普斯的确找到了一个产生多种不同类型的曲线的方法,但他好像并没有意识到这一发现的重要性。他从阿波罗尼奥斯最先解决的产生圆锥曲线的问题开始,将其方法推广为一种生成后来被称为高次平面曲线的算法。帕普斯在这个领域内的发现在此后一千三百多年的时间里很少引起数学家们的注意。



我们可以让一个圆围绕一条直线旋转得到环面。帕普斯发现了一种计算此类物体体积的方法。

最后,我们需要指出:帕普斯也熟练掌握了七百年前由欧多克索斯最早描述的穷竭法。帕普斯运用自己的技巧以及穷竭法研究旋转体(数学上的旋转体指的是一条二维曲线围绕直线旋转而得到的一个三维立体。用车床去削桌子腿、棒球拍或其他物体就是这种思想在物理学上的表现。当车床围绕木头旋转时,切削工具就刻出了一条曲线)。为了正确地理解帕普斯的定理,我们在这里给出一个简单的例子:考虑一个圆。如果令这个圆围绕圆外一条直线旋转一圈,就会得到一个看起来非常像面包圈的图形,用这种方式所得到的立体的学术名称为环面(参见插图)。帕普斯发现:环面的体积等于这个圆所围面积 A 与 A 的中心绕旋转轴一周的距离之积。如果设 h 表示圆心移动的距离,则环面体积的方程可以表示为 $V = A \times h$。

希腊数学传统的终结

亚历山大的帕普斯生活的年代要比米利都的泰勒斯(第一个重要的希腊数学家)大约晚800年。帕普斯最重要的著作——《数学汇编》,是希腊流传到现在的、距我们年代最近的一本重要数学论著,但“帕普斯是希腊最后一位最重要的数学家”还是有异议的。在帕普斯去世之后,亚历山大博物院作为重要的研究和学术圣地保持了一个世纪之久。

许多历史学家都将希腊数学学术的终结与许帕提娅(Hypatia,约370—415)之死联系起来,她是亚历山大大学著名的数学家和天文学家。许帕提娅为众多杰出的数学家和天文学家的著作写了许多数学评注,如佩尔格的阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》,亚历山大的丢番图(Diophantus)的《算术》,等等。在她的天文学著作中曾经对托勒密(古代最具影响力的天文学家)的著作作过评注。在希腊数学传统的最后几个世纪里,撰写其他数学家或天文学家的著作的评注已经成为司空见惯的事情了。

因为许帕提娅的著作没有一本能够流传到现在,所以我们对她的了解都来自二手资料。我们是通过她的一个学生给她的来信,以及当时的作家对她及其工作的描述了解她本人的。十六个世纪之前,许帕提娅在亚历山大肯定是位广为人知的公众人物。她在数学及科学上的杰出才能,使她在亚历山大的早期基督教徒同异教徒的冲突中成为有争议的人物。亚历山大早期的基督教徒把数学与科学同异教徒的行为联系了起来。

基督教徒同异教徒之间的争端有时带有暴力性质。许帕提娅最终被基督教的暴徒所谋杀，但是她的死并没有终止自己的影响。她对亚历山大的学者以及后来数学的发展有着深远的影响。在她被谋杀后，亚历山大的许多学者决定离开这个地方。在作为世界上最重要的数学学术中心大约七百年之后，亚历山大进入了衰退时期，从此一蹶不振。

帕普斯进而发现了计算旋转体的体积的一般公式。现在，计算旋转体的体积通常是微积分入门课程里要反复解决的一类问题。然而，在帕普斯生活的那个时代，这类问题要困难得多，那是因为:(1)在此之前还没有研究过此类概念;(2)还没有发明微积分;(3)使用穷竭法往往比标准的微积分技巧困难得多。

古希腊的数学传统延续了许多个世纪，产生了大量意义深刻的数学知识，主要包括三角形、圆锥曲线、螺线等诸多曲线的性质。但是，这样的数学意味着什么呢？当回顾欧几里得、阿基米德、阿波罗尼奥斯、帕普斯以及其他数学家的著作时，我们选择的是那些与现在最有联系的思想。我们忽略了其他结果。有时候那些对我们来说非常重要的数学结果并不被发现此结果的数学家所重视。反之，他们重视的结果在我们看来可能没有什么重大意义。

现在，许多数学家常常会指出:现在看起来毫无意义的、深奥的结果或许以后就会被证明是非常重要的。但正如许多数学家所知，"或许以后被证明是重要的"在逻辑上等价于"或许以后被证明是不重要的"。我们应该尽量根据他们自身的条件去评价本章中所谈到的数学家的成就。他们从事的创造性研究，将我们带入了一个数学思想的世界。在数学史上，正是这些数学家第一次认真

地去尝试发展一门演绎的科学。希腊数学家通常在不参考任何非数学的判断准则的条件下着手自己的研究,从他们遗留下来的著作可以清楚地看出他们想如何评判自己的工作。他们相信自己的研究工作在审美方面同画家、音乐家和雕刻家的工作一样重要。

然而,希腊数学家可能没有认识到他们的工作还有另外一方面的重要性。由于后继的非希腊数学家对希腊数学方法的传承沿用,使得希腊数学对我们来说也是重要的。伊斯兰数学家主要对代数学感兴趣,他们也熟悉希腊人的几何学。希腊的严格标准以及希腊数学家关于几何的深刻见解影响了伊斯兰代数学的发展,而伊斯兰的代数学——特别是花拉子米(Mohamed ibn-Mūsā al-Khwārizmī,约 780—850)的代数——极大地影响了欧洲文艺复兴时期代数学的发展。希腊数学也影响着欧洲科学的发展。文艺复兴时期的科学家们通过希腊几何学深入地了解行星的运动轨迹以及投射物的飞行过程。牛顿(Isaac Newton,1643—1727)的伟大著作《自然哲学的数学原理》中充满了希腊的数学思想,而且牛顿去世很久以后,希腊数学还一直被人们所沿用。正如前面所提到的那样,1899 年,希尔伯特重新研究了希腊几何学,并给出一组公理,这组公理修订且更正了欧氏几何的公理。虽然这些新公理反映了较为现代的严格化思想和更高的逻辑标准,但欧氏几何仍然是他的研究基础。1984 年,历史上最多产的数学家之一匈牙利的数学家爱尔特希(Paul Erdös,1913—1996),举办了一次研讨会,主要讨论的内容就是欧氏几何里一系列尚未解决的问题。

在希腊数学逐渐退居二位以后,人们提出的许多问题、解法及应用是希腊人所不能预料到的。希腊人对物理、逻辑以及数学的

理解与此后人们的理解完全不同。但是,在理解和欣赏他们的工作时,我们也应当考虑到他们所发展的思想的巨大实用性以及内在美。

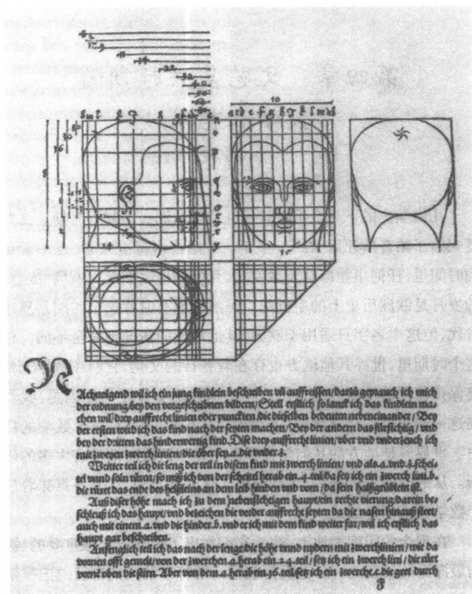


第二部分　射影几何学

第四章　文艺复兴时期的数学和艺术

几何学史的下一个重要时代开始于欧洲文艺复兴时期。文艺复兴始于帕普斯死后大约一千年。按照许多标准来看，在一千年的时间里，任何事物都会发生变化，几何学也是如此。这段“流逝”的岁月是欧洲历史上的中世纪。虽然人们有时称这个时期是黑暗时代，但这个名字只适用于欧洲，其他地方的情况则完全不同。在这个时期里，世界其他地方也存在着各自的文化，它们在数学上始终保持着创造性研究的传统。产生这段历史差距的原因是：我们在这一卷里详细讲述的是“几何学”的历史，而不是整个数学的历史。世界其他地方的几何学在欧洲中世纪这段时期没有太多的创新。从数学的角度来讲，当欧洲处于休眠状态时，这并不意味着整个数学领域都是如此。

在现今的印度大地上，数学家们作出了数学史上最重要的、影响最深远的创新之一。他们把表示0的符号纳入到自己的记数系统里，发明了一套可靠的位值制记数法。最终，精确的大规模计算首次变得可行起来。借助所谓的印度人的记数法，那些对于商业和科学必不可少的计算最终也变得足够容易，不是数学专家的人也能够完成。我们对这种创新的重要性再怎么夸大也不过分。虽然印度数学家对代数学的发展也有贡献，但把几何学作为一个单



Nachuolgend wil ich ein jung kindlein beschreiben vñ auffreissen/darzů geprauch ich mich der ordnung/bey den vorgeschribnen bildern/Stell erstlich so lanck ich das kindlein machen wil/drey auffrecht linien oder puncken/die dieselben bedeuten nebeneinander/Bey der ersten wird ich das kind nach der seyten machen/Bey der andern das fürsichtig/vnd bey der dritten das hinderwertig kind. Dise drey auffrechte linien/ober vnd vnder zeuch ich mit zweyen zwerch linien/die ober sey.a.die vnder.z.

Weitter teil ich die leng der teil in disem kind mit zwerch linien/ vnd als.a.vnd.z.scheitel vnnd soln rüren/so miß ich von der scheitel herab ein.4.teil/da setz ich ein zwerch lini.b. die rüret das ende des helßleins an dem leib hinden vnd vorn/da sein halßgrüblein ist.

Auff diser höhe mach ich zu dem nebensichtigen haupt/ein rechte vierung/darein beschleuß ich das haupt/vnd bezeichen die vorder auffrechte seyten da die nasen hinauß steet/auch mit einem.a.vnd die hinder.b.vnd ee ich mit dem kind weiter far/wil ich erstlich das haupt gar beschreiben.

Anfenglich teil ich das nach der lenge/die höhe vnnd nydern mit zwerchlinien/wie da vornen offt gemelt/von der zwerchen.a.herab ein.24.teil/setz ich ein zwerch lini/die rürt vornē oben die stirn. Aber von dem.a.herab ein.16.teil/setz ich ein zwerche.c.die get durch

丢勒(Albrecht Dürer)创作的绘画作品。文艺复兴时期,艺术家们普遍的做法是在比例和透视的研究里使用数学方法。(Library of Congress, Prints and Photographs Division)

独的学科,他们却几乎不感兴趣。印度也不是这个时期内唯一保持着活跃的数学研究传统的地方。

伊斯兰的文化繁荣昌盛，产生了许多杰出的数学家。正像在印度次大陆上一样，信仰伊斯兰教的地方都注重学术活动，其中特别包括数学。伊斯兰数学家通过翻译和传播希腊前辈们的著作，保存下来了古老的知识。现在，许多著名的古希腊著作只是通过阿拉伯文的翻译才为我们所知。此外，在这个时期内，伊斯兰数学家和印度数学家之间的相互交流开始了。伊斯兰数学家很快认识到由印度数学家发明的记数法的重要性，他们把印度的一些著作译成了阿拉伯语，并很快吸收了自己远至世界东方的邻人所发明的记数法。此外，伊斯兰数学家在代数学方面发展了一种新的、严格的方法，这也是一个重要的创新。对于数学史来讲，虽然所有这些活动都是重要的，但在几何学的历史里却没有什么成果可以添加。

15世纪，人们发现了一门全新的几何学，从此几何学翻开了崭新的一页。文艺复兴时期，艺术家们努力尝试用一种被人们称为表象艺术的手法描绘出呈现在人们眼前的世界时，导致了这门新几何学的诞生。艺术家们的创新导致了最初的非欧几何学的发展，人们称这门新几何学为射影几何学。在所有的几何学中，它是独一无二的，因为它来源于艺术而不是科学或数学。

回忆一下中世纪欧洲的艺术是什么样子，有助于我们了解射影几何学是如何产生的。在整个中世纪，欧洲的艺术家们一直在努力发展一种内涵丰富的视觉语言。《圣经》里的故事，尤其是选自《新约全书》里的那些故事，是他们许多绘画作品的基础。人们通常很容易就能辨认出他们所描绘的宗教场景。的确，把这些故事讲给大部分没有文化的民众无疑是他们目标的一部分。艺术家们通常把这些绘画作品里的中心人物绘成带有光环的人，故事中的主要人物画得比次要人物一般要大。绘画作品中的主要人物有



喀山的女神，非表象艺术的一个例子。例如，我们注意到画中没有这样的线索：观众能够由此断定是云层里上帝的图像较小，被放在前景的附近；还是云层里上帝的图像较大，被放置在背景的深处。我们还注意到：照亮主要人物脸部的光源的位置不明显。（Library of Congress, Prints and Photographs Division）

时候被画得与周围的环境不成比例。一个人物对故事情节越重要，他（她）距离画的中心也就越近。他们的形象也是十分动人的。一位不太出名的艺术家对一幅绘画作品的布局、颜色的使用、高度非写实化的图像，以及明显的创作热情都会使这些作品值得研究，但从现代人的角度来看，那些形象看起来仍旧那么生硬。他们的画看上去没有动感，也没有愉悦感或忧愁感。由于他们没有深度的感觉，他们的画便没有阴影，没有明显的光源，也没有建立几何透视的尝试。与其说这些图画与文艺复兴时期发展起来的绘画风格有共同之处，倒不如说它们和埃及的象形文字相似。对于我们大部分人来讲，认识到这些绘画作品里呈现的美感只是经过仔细研究的结果，中世纪的美的观念往往与我们现在的相差甚远。

表象艺术的发展是文艺复

兴时期取得的巨大成就之一。这个时期一些最著名的艺术家的名字在现在仍是家喻户晓。甚至到现在,我们许多人对意大利的艺术家达·芬奇(Leonardo da Vinci)、米开朗琪罗(Michelangelo)、拉斐尔(Raphael)和德国的画家丢勒都很熟悉,他们中的每个人都创作出了数百年来引起观众共鸣的绘画作品。因为他们选取的题材以及通过自己的艺术表达的思想,所以我们现在仍能够记起这些艺术家。他们的专业绘画技巧,也让人们难以忘怀。技法对于他们来说是重要的,文艺复兴时期的艺术家们使用的技法是他们在艺术上所取得成就的一个重要组成部分。表象艺术是他们追求的目标,他们需要的不仅仅是天赋,也需要成功创作出表象艺术的良好的洞察力。

创作出表象艺术的绘画作品所需要的本领不是“与生俱来的”。无论多有天赋,没有一个人生来就具有这些本领,也未必生来就有发展它们的愿望。例如,没有证据表明中世纪欧洲的画家不如他们之后的画家有天分,也没有证据表明这些非表象艺术家们尝试去发展表象艺术的技巧,并且没能成功。因此,要创作表象艺术就必须发明新的技法,而那个时代一些最有才智的人正是积极从事于这些技法的发明。幸运的是:文艺复兴时期的一些最优秀的艺术家也是当时一些最杰出的建筑师、科学家、数学家和发明家。他们不仅具有创作表象艺术的思想,而且也拥有找到一种取得成功的方法所必不可少的技巧。

从数学上来讲,在创作表象艺术(在后面的叙述里,我们把注意力放在绘画和制图中)的过程中所遇到的主要困难是:艺术家们努力创作出三维物体的二维图像。因此,艺术家们在创作平面图时必定包含着某种扭曲。文艺复兴时期,一些艺术家敏锐地意识

到某些扭曲是不可避免的。他们的目标并不是消除这种扭曲，而是找到一种将三维物体“投射”到平坦的画布或者纸上的合理方法，以便把扭曲减少到最低限度。他们不久就认识到达到这个目标的合理方法是存在的。少数艺术家也认识到了自己所使用的方法存在着数学基础，他们对这些射影方法的数学基础的探索标志着“射影几何学”发展的开端。

达·芬奇

意大利的艺术家、科学家、发明家和建筑师达·芬奇（1452—1519）曾经接受过成为一名艺术家的教育。在他生活的那个时代，意大利有抱负的画家都通过当学徒来学习技艺。大约在15岁时，达·芬奇师从于一位著名的艺术家——维劳奇奥（Andrea del Verrocchio，1435—1488）。在学徒生活的一开始，他学习怎样混合涂料、展开画布，同时也掌握了其他基本的“绘画”技巧。当达·芬奇越画越好时，就有机会把老师开了个头的绘画作品画完。他本可以成为艺术家协会的一名会员而最终“毕业”。1472年，达·芬奇被接纳进入佛罗伦萨的画家协会。虽然他当时本可以独立地进行创作，但他在维劳奇奥的画室里又度过了五年，这种训练对达·芬奇有深刻的影响。在他的生命即将结束时，尽管一生中只完成了一小部分绘画作品，但他还自认为是一名画家。事实上，他拒绝了许多绘画的机会，也没能完成自己答应的许多绘画委托。然而，我们可以从他的绘画作品里清楚地看到：达·芬奇认为绘画是一项重要的训练。与没学过绘画的人相比，学过绘画的人有机会更深刻地认识自然。现在，达·芬奇流传下来的绘画作品不足20幅。



达·芬奇的《蒙娜·丽莎》。可与前一部分里喀山的女神相媲美。(Library of Congress, Prints and Photographs Division)

大约在 30 岁时，达·芬奇开始研究数学，也开始记笔记。在他的余生中，达·芬奇不断地记笔记，这些笔记本是我们了解他最好的资料来源，上面附有大量的插图，也包含了他本人关于艺术、建筑、设计、数学、众多发明、解剖学、物理学和其他许多学科的思想。达·芬奇利用自己是艺术家的身份来研究所有这些学科。正是通过他的笔记本，我们才了解到达·芬奇关于表象艺术绘画作品的数学基础的思想。

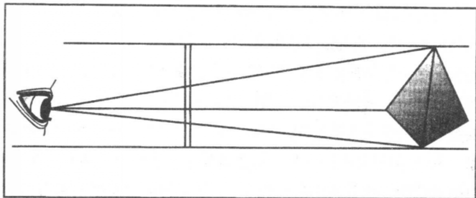
人们可以在二维表面上描绘出三维场景，就像我们的眼睛看到的那样。当我们用这样的方式描绘场景时，存在着数学基础。达·芬奇不是注意到这种情况的第一个人。意大利的艺术家阿伯提(Leon Battista Alberti, 1404—1472)和德拉·皮耶罗(Francesco della Pierro, 约 1420—1492)已经证明了当时使用的方法存在数学基础，但达·芬奇更为深入地洞察到了其中所包含的几何思想。达·芬奇知道：视觉图像在空间中是沿直线传播的。因为每个图像必须进入瞳孔我们才能看到，所以图像必定形成达·芬奇所说的“光锥体”。他告诉我们“眼睛只能以光锥体的形式看到东西”，但这些并不是通常意义上的光锥体。光锥

体的顶点只是我们眼睛瞳孔内的一点,它的底是观察者所看到的物体的轮廓。例如,当我们观察一个圆形物体时,达·芬奇所说的光锥体的底是圆形的。当我们观察狗时,光锥体的底是狗的形状。构成光锥体的边的线总是向观察者的瞳孔后面的一个点会聚。

人们公认如下两种思想是不同寻常的:我们有延伸进入自己眼睛瞳孔里的光锥体,而且这个光锥体的底由自己周围的物体所构成;每当我们睁开眼睛时,这些光锥体就形成了。然而,如果想要理解我们是如何观察物体的话,上述两种思想则是非常有用的。例如,假定我们正在观察平放在水平面上的硬币,并假定我们正站在这个平面上,以使自己的眼睛位于硬币之上。距离我们眼睛越远的物体看起来越高,因此,如果把硬币放得越远,它看起来好像越高。但是,无论这个平面有多大,没有一枚硬币看起来比地平线还要高,这种观测解释了为什么通常都是把较远处的物体画得让它们看起来离图画的顶部近些。

达·芬奇也使用上述这种观点来解释为什么越远的物体看起来越小。一个物体放得越远,以那个物体为底的光锥体所形成的角就越小。为了进一步研究这种现象,达·芬奇建议在离开眼睛不同距离的地方直立地放置一根长杆(参见插图)。我们注意到放置长杆的地方距离眼睛越远,由长杆的两端和我们的瞳孔所形成的锥体就越窄。当锥体的底向远方移动时,我们能够测出位于顶点的角减小的速度。达·芬奇提出了一个包含长杆和塔的实验,将长杆竖直地放在眼睛和塔之间,以便于杆的两端好像与塔顶、塔底重合。现在,朝观察者那个方向水平地移动那根长杆。当长杆向观察者移动时,杆的顶部好像延伸到了塔顶之上,同时杆的底部也好像延伸到了塔底之下。杆上的标记能够用来证明达·芬奇的光锥

体的形状实际上是金字塔状的。



达·芬奇的光锥体。长杆用来研究这个光锥体的形状。

上述这些观察结果是我们画出一幅有关物体或场景的表象艺术作品所需要的。为了描述表象艺术的作图或者绘画，有必要做的所有事情就是设想在物体和艺术家之间有一块玻璃，并且这块玻璃沿一个平展的表面去截那个光锥体。接下来艺术家们的工作就是描绘出在这块玻璃上呈现的图像。然而，为了使玻璃去截那个光锥体，放置玻璃的方式不止有一种。我们可以把玻璃放得离眼睛近一些或者远一些，还可以上下或左右地倾斜玻璃。在每种情形里，出现在玻璃上的图像都发生了改变，即我们对透视效果的判断发生了变化。如果只是来回地移动玻璃，图像的不同部分之间的距离就会发生变化。如果将玻璃倾斜，那么在玻璃和锥体的边之间构成的角也会发生变化。当这种现象发生时，构成玻璃上图像的那些角也发生了改变。因此，达·芬奇用于产生透视图的方法既不保持距离，也不保持角度。这不是一个错误。当我们改变相对于一个固定物体的位置时，角和距离确实发生了变化，这是不可避免的。然而，在每种情形里，如果我们仿照达·芬奇的模型，那么对于观察者的眼睛所在的那个特定位置和那块玻璃的那个特殊

定向来讲,描绘出的图画是"透视的"。

达·芬奇的光锥体不是人们真正观察周围世界的方式的一个确切模型。达·芬奇在自己的作品里同样承认这些见解,他指出:他的模型很好地演示了我们用一只眼睛观察世界的方式。当借助两只眼睛——就像大多数人观察世界一样——情况就会变得更加复杂。他的模型不能解释当用两只眼睛环顾世界时发生的一些现象。例如,如果我们把手的一侧沿着鼻子置于两只眼睛之间时,两只眼睛就会分别看到手的两侧。达·芬奇的视觉模型没有考虑这种影响。

达·芬奇给出的模型的另一个结果是:如果站在不合适的地方观察时,所看到的绘画作品就会扭曲。例如,在艺术家看来,假定球面在一块玻璃上呈现的图像是圆,然后艺术家把球面画为圆。但是,如果我们站在这幅图画的一侧观察球面时,那么从我们所在的角度来看,艺术家眼中的圆看起来好像是一个椭圆。在这种情形下,虽然艺术家正确地描绘出了物体,但是由于所处的观察位置,我们所谓的"正确的"图像则被扭曲了。达·芬奇建议:为了合理地评价艺术家的绘画技巧,我们有必要站在合适的位置,并且用一只眼睛来观察绘画作品。但是,从实用的观点来看,达·芬奇的方法的真正困难是:总体上来讲,没有一种实际方法将达·芬奇想象的那块玻璃与我们所希望得到的绘画作品联系起来。

丢　　勒

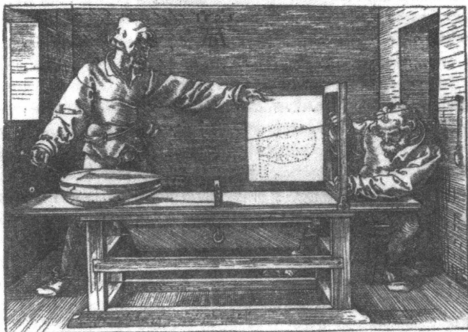
与达·芬奇在意大利和法国的影响一样,丢勒(Albrecht Dürer, 1471—1528)在德国和低地国家(Low Countries)非常有名,受到人们

的赞赏。他的启蒙老师是他那个当金匠的父亲。15岁时,丢勒成了绘画家和版画复制家沃格穆特(Michael Wolgemut,1434—1519)的学徒。到1490年时,丢勒学徒期满,开始了一生中对艺术的追求。

与达·芬奇不同,丢勒是一个非常多产的人,他在许多方面都有贡献。除了创作绘画作品之外,他还是一位成功的雕刻家和理论家。他曾经写过一部关于几何学的重要性和表象艺术中度量的著作——《度量技术教程》(*Course in the Art of Measurement*),它由四卷构成。虽然这部著作是各种各样的成果的汇编,但它主要强调的是数学在透视问题中的应用。有趣的是,在《度量技术教程》这部著作里,也显示出丢勒对古典的希腊几何学感兴趣。例如,他谈到了古典几何学中三个尚未解决的问题之一——倍立方体的问题,还有迹象表明他熟悉圆锥曲线,虽然与发现圆锥曲线更深刻的数学性质相比,他显然对找到绘出它们的合理方法更感兴趣。丢勒撰写数学著作的动因是分析南欧主要由达·芬奇和其他人所创作的艺术背后的理论,并使得北欧同时代的人能够理解这些理论。在北欧,文艺复兴到来的比较晚。

我们从丢勒的著作里可以清楚地看到:丢勒没有把数学和艺术看作是互相独立的学科。对于他来讲,数学不仅仅是一种工具,还是一门能够使自己享受到乐趣的学科。他甚至在自己的一些绘画作品里融入了数学话题,但是从数学的角度来讲,他在理论上所得到的有关透视的结果不如达·芬奇的深刻。两者之间所不同的是:丢勒演示了如何制作一种尽管非常费力,但实用的装置来实现他(和达·芬奇)的有关透视的想法。实际上,丢勒告诉了我们如何在观察者和物体之间画出现在所说的射影——达·芬奇将其想象

mit einem anderen puncten aber also pis das du die gantzen lauten gar an die tafel punctirst / dann
zeuch all puncten die auf der tafel von der lauten worden sind mit linien zusamen/ so sichst du was dar-
auß wirt / also magst du ander ding auch abzeychnen. Dise meynung hab ich hernach aufgerissen.



Und damit günstiger lieber Herr will ich meinem schreyben end geben / und so mir Got genad ver-
leycht die bücher so ich von menschlicher proporcion unnd anderen darzu gehörend geschryben hab mit
der zeyt in druck pringen/und darpey meniglich gewarnet haben/ob sich yemand wider-
steen wurd mir diß außgangen büchlein wider nach zu drucken /das ich das
selb auch wider drucken will / unnd auß lassen geen mit meren und
grösserem zusatz dann ietz beschehen ist/darnach mag
sich ein yetlicher richten/Got dem Herren
sey lob und eer ewigklich.

Gedruckt zu Nürenberg.
Im. 1525. Jar.

丢勒的绘画作品中创造透视感的装置。(Library of Congress, Prints and Photographs Division)

成一块玻璃。这种装置能够让使用者给出透视作图方法的一个实际例证。这是以几个重要的几何思想为基础的一个引人注目的发明。作为参考,我们提供了丢勒所绘制的有关这个装置的图,它最初是以木刻画的形式创作出来的。

丢勒从确定光锥体的顶点和底出发开始研究。在他的例子里，底是鲁特琴，顶点是插图的右边钉在墙上的圆孔。如果让一只眼睛处于圆孔的位置，并尝试着按照从圆孔中看到的样子画出这把鲁特琴，我们就会遇到技术上的挑战，困难产生于鲁特琴所处的位置。因为琴颈指向观察者，结果当我们从圆孔那个地方后退时，图中的琴身和琴颈看上去都缩短了很多。丢勒的装置有助于艺术家们从圆孔那个位置去想象鲁特琴。这是十分重要的，因为他的纯粹的机械装置能够使艺术家们用某种方式去"截"那个以鲁特琴为底、以圆孔为顶点的光锥体，而这是用达·芬奇的一块玻璃的想法所不能够做到的方式。丢勒的发明甚至能够让艺术家们更好地理解这些结果。

艺术家们使用这种装置的第一步是建立一个有门的框架，这扇门可开、可关。在门的背面上，他们搜集了我们所说的有关鲁特琴的"数据点"(当然，丢勒不会这样称它们)。门打开时的框架对应达·芬奇所设想的用来截光锥体的那块玻璃，其数学术语是"截面"。

我们可以借助细绳看到光锥体的边。左边的人使用一个绑在细绳一端的指示物，这个指示物被用来选取鲁特琴上用作分析的一个点。细绳的另一端绕着穿过右侧的圆孔。为了使细绳保持拉直状态，圆孔下面的绳上系了一定重量的物体。如果想象观察者的眼睛位于圆孔，那么细绳给我们指出了光线从鲁特琴上的一点进入观察者的眼睛所经过的路线。

为了帮助人们想象光线在截面上所形成的图像，丢勒使用了另外的两条细绳：竖直方向拉直的绳和水平方向拉直的绳。前者与框架的竖直边平行，而后者与框架的水平边平行。竖直方向的

绳能够沿着框架往返地运动，水平方向的绳也能够沿着框架来回地运动。下面是这个装置工作的步骤：

步骤1：位于图左边的人在鲁特琴上的一点放置指示物，这个点的射影是我们想要研究的。这样做完以后，她（或他）就给出了从鲁特琴上的那个点到圆孔的一条线（细绳）。

步骤2：位于图右边的人移动长方形框架上的两条细绳，直至它们在上面那条线穿过截面（用框架来表示它）的那个点处相交。

步骤3：从框架处移开透视线，关闭框架上的门。现在，框架上的那两条细绳就标出了门上的一个点，也就是图上右边的人所标出的那个点。

按照人们的需要，这个过程还可以重复。其结果是一个点集，如果把这些点连在一起，这个点集就能够让使用者想象从小孔透视鲁特琴看起来是怎样的。我们注意到这样一个事实：图中门上的那个点集形成了鲁特琴按照透视法所缩短的一个很好的轮廓。

这是一个十分漂亮的、证明透视几何学的数学实验，上面那个装置具体演示了一门数学分支里的某些基本原理，后来这门分支被人们称作射影几何学。

为表象艺术的方法寻找数学基础是射影几何学发展中最重要的一步。这些艺术家提供了进一步研究的背景，也给出了射影几何学第一个具体的例子。虽然他们没有证明定理，但他们的工作给出了更严格的数学研究所需要的基础，这几乎与传说中埃及的测量术鼓舞了希腊人开始研究几何学是一样的。

这并不等于说这些艺术家把他们的艺术“简化为”一系列的数学公式。他们和同时代的人遗留下来的著作很清晰地表明了这样一个事实:他们完全忙于从事一个艺术过程,他们寻求通过自己的艺术来表达情感和美学价值的方式。对上述事实的其他的看法都是错误的。但不能理解如下的几个方面也是一个错误:这种艺术风格具有数学基础;一些最为重要的艺术家知道自己的艺术建立在数学原理的基础之上,而且他们认为,当艺术从数学背景里产生时,他们在艺术上的努力才是最成功的。

这些艺术作品激励着全世界的艺术爱好者,同时也激励着 17 世纪富有创造力的数学家们去尝试发展一门新的几何学分支,这门学科能够用一种比较严格的、在逻辑上令人满意的方法来表达和拓展这些艺术家对数学的认识。

第五章　第一批定理

对于定理的叙述是这样的:它不是不证自明的,而是已经被证明是正确的。达·芬奇和丢勒都不曾给出射影几何学这个领域内的任何一个定理。但是,他们的确认识到了这个数学分支中的一些基本概念。虽然我们能够从他们的语句中来理解他们的思想,而且这些思想最终构成了这个新的思想分支中的一些公理,但达·芬奇和丢勒都没有把这些概念置于严格的数学著作所必不可少的背景之中。第一个把文艺复兴时期艺术家们的工作转变为一套数学定理的人是法国数学家德扎格(Desargues,1591—1661)。

德扎格除了对数学感兴趣之外,还是一名工程师和建筑师。他以这种身份为法国政府工作。他热爱数学,也认识同时代许多最优秀的数学家。德扎格是当时少数幸运的数学家之一,他有机会参加法国神父梅森(Marin Mersenne,1588—1648)在家举行的每周一次的聚会。梅森把自己的家变成了巴黎最优秀的数学家在一起交流思想和学习的地方。因为当时没有学术刊物,这些俱乐部——其他城市也有类似的俱乐部——和定期的通信就成了数学家和科学家们用来交流他们的发现的方式。正是在这些聚会上,德扎格阐述了自己关于一种新几何学的思想,这种新几何学以文艺复兴时期艺术家们的方法为基础。

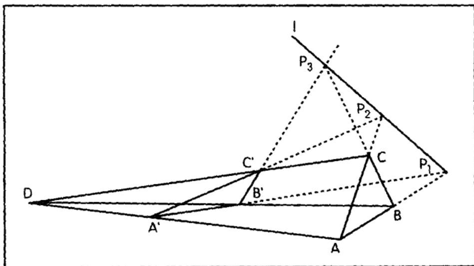
德扎格的思想没有得到人们普遍的认可,一部分原因在于德

扎格用一套全新的数学词汇来表达他的新思想。为了表达这些思想,他专门发明了这套词汇;这是不合适的,因为按照一般规律,仅仅为了评价不知道是否值得思考的一套思想,很难说服许多人来学习一套全新的词汇。此外,德扎格是用十分简洁的方式写作的,许多人明显觉得很难理解。然而,如果把表述方式和词汇的问题暂且搁置一边,德扎格关于几何学的思想具有高度的原创性。甚至在最有利的条件下,单是这种差别就很难让德扎格的几何学受到重视。

为了正确评价在理解这种新几何学的过程中所涉及的概念上的困难,请大家回忆:通常来讲,一个图像的射影既改变角度也改变长度。(这经常被表述为:射影既不保持长度也不保持角度。)不过,德扎格的同时代人只熟悉欧几里得几何学,长度和角度是这种几何学所通用的,它们恰恰是数学家研究这种几何学时所研究的内容,但德扎格的射影恰巧推翻了同时代的人普遍认可的几何性质。接下来,第一个问题是在德扎格的新几何学里是否有有待研究的内容。如果有的话,那就是什么性质在从一个射影到下一个射影的过程中保持不变?德扎格需要确定出那些在射影下保持不变的有趣的性质,因为这些性质必定构成这门学科的基础。由于德扎格已经把长度和角度从研究对象中去掉,所以他是否给自己留下了可供研究的对象不是立刻就能清楚的。

三角形有这样的性质:它在射影下还是一个三角形。虽然三角形的形状和大小都发生了变化,但任意一个三角形在射影下的图像总是另一个三角形。遗憾的是,这种认识几乎是不言而喻的。德扎格想要确定的是在射影下可能保持不变的其他更深层的性质。从艺术家们的观点来看,人们有充分的理由觉得许多性质在

射影下保持不变，两个不同的射影毕竟是同一个物体不同的图像。看起来存在如下的情况至少是可能的：同一图像的所有射影存在其他更为有趣的公共性质。



德扎格定理的图示。假设已知三角形 ABC、$A'B'C'$ 和点 D，我们必定能够证明出线 l 的存在性。

德扎格的第一篇论文《透视截面论》(*Treatise on the Perspective Section*)中包含现在所说的德扎格定理。这个定理是射影几何学里最著名的定理之一，一部分原因是它是第一个定理，另一部分原因是它表明了"射影变换"存在不太明显的性质。为了理解德扎格定理的内容，请读者参考插图。请大家注意：三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 是"透视的"：即每个三角形都是同一个光锥体的截面。因此，A' 是 A 在射影下的像，B' 是 B 在射影下的像，C' 是 C 在射影下的像。德扎格定理陈述的内容如下：如果将每个三角形的对应边延长，它们不但相交，而且所有这三个交点(这里分别用 P_1、P_2、P_3 来表示)位于同一条线上。除了一种重要的情况例外，无论我们怎样投

射三角形 ABC，上述结论总成立。

当我们选定了用于确定三角形 $A'B'C'$ 的截面，使得这两个三角形的一组或更多组对应边平行时，德扎格定理的例外情形出现了——或者至少说好像出现了。如果两个三角形的对应边平行，那么在通常的欧几里得意义下它们就不会相交。解决平行线的问题需要从存在性的角度来定义它们，这通过如下方式来实现：假定存在额外的一点，即"无穷远点"——定义它，为的是让"平行的"线相交于这个额外的点。现在，我们可以说：在所有的情形里，由对应线相交所得到的三个点都是共线的：即这三个点位于同一条线上。

在无穷远处存在额外的一点看起来可能是人为的，但结果证明这有着巨大的便利。此外，虽然两条平行线相交于无穷远点听起来很奇怪，但这种表述仅仅是对我们在图画中所观察到的结果的一种呼应，旨在表示两条平行线沿水平方向渐渐远去。这两条线总是相交于图画所在的水平面上的唯一一个点。射影几何学的语言与表象艺术的语言之间的不同是：在艺术上，无穷远点被称作消失点，消失点是两条平行线看上去要相交的那个点。在射影几何学里，"消失点"只是简单地被称作无穷远点。德扎格定理是三角形及其射影所共有的一个不明显性质的重要例子。下面是对德扎格定理的一个比较正规的陈述：

> 已知两个三角形，如果由对应顶点确定的所有线相交于一个公共点，那么由对应边确定的所有点位于同一条线上。

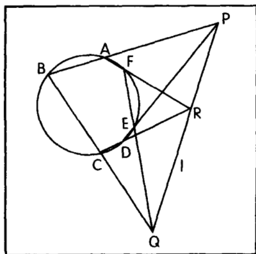
对于德扎格来讲，这仅仅是一个开始。德扎格在发现以他的

名字命名的定理以后,将注意力从简单的三角形转向了圆锥曲线。他想知道圆锥曲线的哪些性质在射影下保持不变,如果存在的话。他的发现包括在其代表作《试图处理圆锥与平面相交结果的草稿》(*Draft of an Attempt to Deal with the Events of the Meeting of a Cone with a Plane*)中。德扎格研究的圆锥曲线与阿波罗尼奥斯几乎在2 000年之前所研究的一样,两位数学家的不同之处在于德扎格从自己的观点(射影几何学的观点)来论述圆锥曲线。在此过程中,德扎格发现了一些令人感到吃惊的、有关圆锥曲线性质的结论:无论将一条圆锥曲线怎样投影,结果还是一条圆锥曲线。一个椭圆在射影下的像不必一定是一个椭圆。例如,一个椭圆在射影下的像可能是一条抛物线或一条双曲线,也可能是一个具有不同形状的椭圆。椭圆在射影下的像取决于我们选取截面的方法。德扎格证明的是如下结论:一个椭圆的像必定是(1)另一个椭圆,(2)一条抛物线,或者(3)一条双曲线。不存在其他的可能情况了。此外,对于椭圆正确的命题也能证明对于抛物线和双曲线同样正确。一条圆锥曲线的射影总是一条圆锥曲线。正是在这种意义下,所有的圆锥曲线在射影几何学里都是"一样的"。

在德扎格发展自己的新几何学并在梅森的家里阐述自己的思想时。未来的法国哲学家帕斯卡(Blaise Pascal,1623—1662),那时只有16岁,他受到了德扎格的研究工作的鼓舞。帕斯卡和父亲E.帕斯卡(Etienne Pascal)一起参加在梅森家中每周一次的聚会。E.帕斯卡是一位数学家,对教育有着十分清晰的思路。他当自己儿子的老师。事实上,父亲教授儿子除数学之外的所有基本科目,他打算让儿子15岁时才学习数学。因此,所有的数学书都从帕斯卡的家里搬走了。但到12岁时,帕斯卡开始自学数学。当他发现

三角形的内角之和等于两个直角时(这卷的第二章里有这个定理的证明),父亲送给他一本欧几里得的《几何原本》。从那儿以后,父亲鼓励儿子研究数学。

后来证明帕斯卡是一个天才。在接触到德扎格的工作的所有数学家当中,年轻的帕斯卡是为数很少的、能够掌握德扎格工作精髓的人之一。不久,帕斯卡便忙于寻找几何图形在射影下保持不变的其他性质,并且找到了一条这样的性质。他的发现与六边形和圆锥曲线有关,是射影几何学里的一个重要思想,帕斯卡以《论圆锥曲线》(*Essay on Conics*)为名将其发表。现在,人们称这个定理为帕斯卡定理。从本质上来讲,我们能够用五个简短的语句来表述帕斯卡定理(参见插图):



帕斯卡定理的图示。已知六边形 *ABCDEF* 内接于一条圆锥曲线,它的对边分别是 *AB* 和 *DE*, *AF* 和 *CD*, *EF* 和 *BC*。延长这些边所得到的三个点 *P*、*Q*、*R* 位于同一条线 *l* 上。

· 假设有一条圆锥曲线。

· 在这条圆锥曲线上选取六个点。

· 连接这六个点,使它们构成一个六边形。(这是一个十分一般的六边形,有六个顶点,但它通常与我们熟悉的正六边形不同。)

· 延长这个六边形的每组对边,直到它们相交。

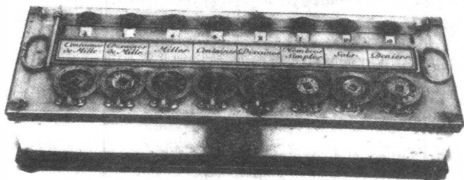
· 三个交点位于同一条线上。

为了真实地反映帕斯卡定理，我们需要更长一点的描述。因为甚至一个不规则六边形的对边也可能是平行的，所以就像在德扎格定理里所做的那样，为了准确地陈述帕斯卡的思想，需要再次引入无穷远点。但是，这会让我们离题太远，因此我们不涉及技术上的细节。就像德扎格定理一样，帕斯卡定理指出了通向一种新型几何学的方法，但在很长一段时间内，德扎格的和帕斯卡的研究工作都没有引起人们太多的关注。

帕斯卡定理是后来的一个重大发现的一半内容，我们不清楚帕斯卡对自己的发现所蕴涵的结果理解到什么程度。他撰写了一本更长的著作，推广了自己关于射影几何学的思想，但这本著作从未发表过，现在已经遗失。到法国数学家布里昂雄(Charles-Jules Brianchon)重新发现并且推广了帕斯卡定理时，时间已经过去了一百多年。

伴随着这两位具有高度创造力的数学家——德扎格和帕斯卡——的研究工作，射影几何学迈向了一个光明的起点。遗憾的是，他们的绝大多数发现都被人们忽视了。德扎格的发现与当时数学的主流相距甚远，以至于一些人嘲笑他的工作。只有他的朋友笛卡儿——本身也是一位著名的数学家——给予他鼓励。更为糟糕的是，不久德扎格又孤军奋战了。虽然帕斯卡具有丰富的想象力，但他的兴趣就像气候一样多变。18岁时，帕斯卡正在忙于设计和制造机械计算器，这是历史上第一批机械计算器中的一个。

德扎格的思想远远超越当时许多数学家的想象。他的《试图处理圆锥与平面相交结果的草稿》发表于1639年，但不久就被人



帕斯卡机(Pascaline),最早的机械计算器(Courtesy of IBM Corporate Archives)。

们所遗忘。所有的副本都遗失了,人们只能通过唯一幸存的那份手稿来了解德扎格的专论。但在19世纪早期,数学家们又开始提出和回答150年以前德扎格努力解决的问题,德扎格的研究工作最终开始得到它应有的关注,他的思想被扩展成一个完整的几何学分支,这引起了当时一些最优秀的数学家的注意。到20世纪之初时,由于许多最重要的问题已经得到了解决,射影几何学又开始从人们的视线中消失,但人们没有忘记德扎格。令人惊讶的是:在几个世纪的沉默之后,人们在1951年重新发现了《试图处理圆锥与平面相交结果的草稿》最初的唯一一个印刷本。1964年,人们用德扎格的名字来命名月球上的一个环形山。

现在,大学生们通常能够在初级的"现代的"几何学课程里学习到德扎格的思想。此外,现在所有的数学家至少对射影几何学的概念有粗略的了解。德扎格可能会对这种形势的变化感到一些满足,但如果他在世时,他的思想得到现在人们一半的关注,他可能会更满足。当然,他的思想并没有发生变化。他的定理没有变,现在和过去没有什么两样。而社会最终承认了它,现在人们从这

些数学思想中享受到乐趣，它们给我们留下的印象是美好的，但并不怪异。德扎格具有高度原创性的思想远远超越他所生活的那个时代。因为他比同时代人看得远，所以他是这卷书中第一个受到人们忽视的几何学家，但我们不久就会看到他的经历决不是独一无二的。

梅　森

法国神父梅森(Marin Mersenne，1588—1648)是数学史上的一位杰出人物。他是一位天才的数学家，喜欢研究数论，而且发现了一类素数，这类素数现在被称为梅森素数。除了深入研究数学之外，他还对所有的科学问题和数学问题特别感兴趣。梅森是理性思想的忠实拥护者。他极力支持科学和数学上的研究，大胆反对炼金术和占星术这些伪科学。此外，梅森还是当时许多最著名的科学家和数学家们之间联系的纽带。他的足迹遍及各地，并与许多有名的科学家和数学家保持着广泛的通信往来，其中包括笛卡儿、伽利略(Galileo Galilei)和费马(Pierre de Fermat)。每当科学家和数学家们告知梅森他们的发现时，梅森就把这些新消息传播开来，这是一项非常重要的工作，但也是十分耗时的工作。那个时候没有学术刊物，梅森的信件是联系欧洲许多大思想家的重要桥梁，而且可能是最重要的桥梁。此外，他还在自己的家中举行每周一次的聚会，吸引了巴黎许多最优秀的数学家。数学家们正是在那里交流思想和辩论观点。梅森和他的朋友之间交换的信件，以及在他的家中每周一次的聚会，对17世纪数学的发展产生了深刻影响。

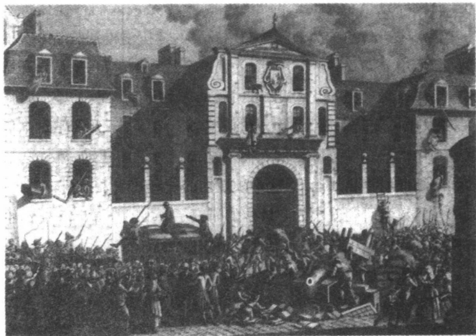
第六章 射影几何学被重新发现

德扎格的思想沉睡了大约150年之久。起初，许多数学家致力于研究导致微积分诞生的问题。微积分是被人们称作分析学(一门数学分支)的一部分。人们用新兴的分析学得到的结果在科学和数学中立即找到了应用，因此从这个意义上讲，几乎从一开始这些结果就是有用的。因此，这门新的思想分支吸引了那个时代许多的，也可能是大部分最优秀的数学家。接下来，几何学这个领域进入休眠状态。分析学被人们用来描述行星的运动、流体的运动和海潮变幻莫测的运动，这个领域内的发现改变了一切。不久，大部分的数学研究就成为分析学的研究了。尤其是德扎格和年轻的帕斯卡的许多思想，很大程度上被人们遗忘了。

由于法国数学家蒙日(Gaspard Monge，1746—1818)的研究工作，射影几何学获得了新生。蒙日过着狂热的、紧张的生活。他对许多科学分支感兴趣，对数学也是如此。他志向远大，工作极其努力。由于他生前法国发生了政治动乱，他的生活也因此变得十分复杂。

蒙日出生于法国，当时法国正处于贵族统治之下。他很小就表现出数学方面的天赋。十几岁时，他发展了自己关于几何学的思想，但由于父亲是一个商人，蒙日在梅斯的军事学校里找到了一

份绘图员的工作,这所学校里的最好职位是留给贵族子弟的。当上级要求他为预计的堡垒确定枪炮的安放位置时,蒙日找到了运用自己的几何思想的机会。当时确定枪炮安放位置的标准方法需要耗费大量时间进行冗长的算术运算。蒙日运用自己的几何方法,很快就解决了这个问题,以至于最初没有人接受他的解决方案。在进一步地深入思考之后,当权者接受了蒙日的思想,并把他的几何方法归到军事机密里。事隔不久,蒙日获得教师一职,不再从事绘图者的工作,他的地位正在蒸蒸日上。



1789 年的法国大革命暴乱。法国大革命深刻地影响了那个时代许多最优秀的数学家的生活。(Library of Congress, Prints and Photographs Division)

蒙日关于几何学的思想包括有关截影和透视的思想,一种被称作画法几何学的数学学科的发展归功于他。(画法几何学与射影几何学之间有某些共同的思想。)但是,蒙日的兴趣远不止是几

何学，他还写了许多关于数学分析、化学、光学、气象学、冶金学、教育改革和其他主题的文章。他不知疲倦地工作着。在梅斯的军事学校当教师的短暂几年里，蒙日也同时接受了第二份工作，在巴黎科学院担任教师。当课程表有冲突时，他就用自己的钱雇用他人在其中的一所学校代他授课。最后，蒙日还同时接受了第三份工作，担任海军军官学校的主考官。也是在这段时间内，他帮助法国建立了度量衡系统。作为一名科学家，蒙日对理论和实验都很感兴趣，对两者的发展皆有贡献。

蒙日关于几何学的思想包罗万象。他所谓的画法几何学的课程包括好几章，内容涉及曲面、截影、地形学、透视和其他主题的研究。他利用自己对几何学的认识发展了借助于垂直的二维截面，实现对三维物体的机械表示，这种表示后来以机械制图著称。蒙日认为：几何学在许多方面都比数学分析更为基本。实际上，他使用了现在的几何方法来表述和解决分析学里的问题。正是通过蒙日的工作，几何学才重新在数学中占有一席之地。

当法国大革命爆发时，蒙日支持革命。那是一个危险的时代，法国国内及其边疆的局势动荡。那个时代的精神在他的研究兴趣不断变化的过程里体现得淋漓尽致。蒙日写作了生产大炮和炸药的文章，也撰写了铸造工作的文章，但仍继续教学。正像我们即将看到的那样，正是通过他的教学，蒙日最终对几何学的历史产生了他最大的影响。

法国大革命最终以失败而告终。从此以后，法国处于本国军事与政治领袖拿破仑（Napolèon Bonaparte，1769—1821）的统治之下。蒙日和拿破仑很快成为朋友。（拿破仑对数学非常感兴趣。）在这段时间里，蒙日旅行频繁。拿破仑派他去意大利协助鉴别法

国自认为是自己的艺术珍品。他曾经陪同拿破仑去过埃及。后来，当拿破仑转向失败时，蒙日不得不为生活而奔波。在拿破仑倒台以后，新政府剥夺了法国先前的政府给予蒙日的荣誉。从此，蒙日不再参加法国科学界的活动。几年以后，蒙日去世。

蒙日的学生

蒙日对数学的影响通过他的学生持续了许多年。法国的数学家、教师布里昂雄(1785—1864)就是蒙日的一名学生。和老师一样，布里昂雄的个人生活也受到了那个动荡时代的深刻影响。在完成了自己的正规教育之后，布里昂雄在法国军队里担任驻西班牙和葡萄牙的炮兵军官。后来，由于健康状况恶化，他最终退役，从此进入了教育界。不久，他找到了一份教学的工作，继续从事数学研究。后来，他把注意力转向了化学。因而，布里昂雄的数学成就并不多。

布里昂雄在学生时代就发现了一个与帕斯卡定理密切相关的著名定理。正是因为这个定理，人们现在还记得他。和那个时代的许多数学家一样，布里昂雄并没有注意到帕斯卡在射影几何学里的研究工作。结果，他重新发现了帕斯卡定理，从此开始了自己的研究。接下来他继续证明自己的定理，这个定理与帕斯卡定理有着特殊的对称性(说明帕斯卡定理内容的插图请参见 83 页)。下面是那两个定理的对照：

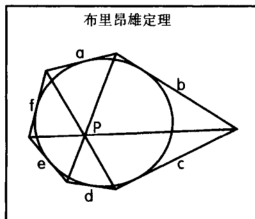
帕斯卡定理：

已知一个六边形内接于一条圆锥曲线，那么这个六边形

的对边的交点位于同一条直线上。

布里昂雄定理：

已知一个六边形外切于一条圆锥曲线，那么连接这个六边形相对顶点的三条线交于一点。



布里昂雄定理。六边形 *abcdef* 外切于一条圆锥曲线。当用线连接这个六边形相对的顶点时，所有这三条线相交于同一个点 *P*。

大家可以注意到如下事实：从本质上来讲，布里昂雄定理是帕斯卡定理用如下替换得到的：(1)"线"和"点"互换；(2)"面"和"顶点"互换（这仅仅是线—点的另一种替换）；(3)"外切"和"内接"互换；(4)"位于"和"交于"互换。所有这些替换只涉及互换那些描述点和线的词（甚至外接—内切也可以用这种方式来理解）。大家肯定也会注意到这样一个事实：如果从布里昂雄定理而不是从帕斯卡定理出发，我们也能够通过适当的替换得到帕斯卡定理。

在某种意义上，帕斯卡定理和布里昂雄定理是同一数学发现的两个方面。由于人们对射影几何学的理解还不足够深入，以致不能充分利用这一结果，但布里昂雄还是发现了后来的对偶原理的早期例子。对偶原理是射影几何学里一个值得注意的、基本的

思想。现在,我们将注意力转向这个原理的发现者。

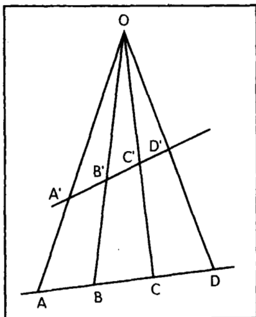
彭赛列(Jean-Victor Poncelet,1788—1867)是蒙日的另一名学生,也是布里昂雄的朋友(彭赛列和布里昂雄合写了一篇数学论文)。和蒙日、布里昂雄一样,彭赛列的生活在许多方面都受到了遍及法国的动乱的影响。在毕业以后,彭赛列成为拿破仑军队里的军事工程师。在入侵俄国的日子里,他在拿破仑的军队里服役。对于法军来讲,入侵俄国是一场灾难。法军不仅战败,而且遭到了重创,残余部队成功地退回本国,但也有许多士兵被俘,彭赛列就是其中之一。在接下来面临死亡的两年里,他被监禁在俄国的监狱里。正是在这段时间里,他研究了射影几何学。彭赛列对射影几何学的贡献远远超过了德扎格、帕斯卡、布里昂雄和其他人,人们有时把他看作是射影几何学的奠基者。

监狱,尤其是为战俘而修建的那些监狱,以其环境的恶劣著称。在独裁统治下的俄国,它的监狱也不例外。然而,彭赛列在极其残酷的环境中茁壮成长。他在俄国监狱被监禁的这两年时间里,进行了许多数学研究,想撰写出一部两卷本的著作《分析学和几何学的应用》(*Applications of Analysis and Geometry*)和《论图形的射影性质》(*Treatise on the Projective Properties of Figures*),其中前一本是后一本的入门教程。在刑满释放以后,彭赛列的计划并没有顺利地展开。《论图形的射影性质》这本被认为是彭赛列最值得纪念的著作,开始写作于他重返法国后的1814年,并于1822年出版。它的入门教程《分析学和几何学的应用》最终在40年后,也就是在1862年至1864年间分节发表。

因为射影几何学中许多最重要的概念在彭赛列的著作里第一次出现,所以人们经常给他冠以"射影几何学之父"的称号。图形

有许多最重要的性质在射影下保持不变，而彭赛列就是第一位发现这些性质的数学家。在他的这些发现中就包括交比这个十分重要的概念。

就像它的名字所暗示的那样，交比是一个比，但是一种特殊的比。我们已经知道距离在射影下会发生改变，早期的数学家可能感到有点儿奇怪：除此之外，距离的比也会发生改变，AB/BC 不等于 $A'B'/B'C'$。在射影下保持不变的是两个距离比的比，因此四个点在射影后的交比与射影前相等（参考右图）。



A、B、C 和 D 四个点分别被映射成 A'、B'、C' 和 D'，交比保持不变。

交比的重要性源于如下的一个基本事实：任意一个保持交比不变的空间变换都是一个射影变换。换句话而言，交比和射影这两个概念密切相关。此外，我们还可以利用交比来理解点的位置在射影下如何改变。

交比由如下的公式来确定：

$$\frac{AC}{CB}\Big/\frac{AD}{DB}=\frac{A'C'}{C'B'}\Big/\frac{A'D'}{D'B'}$$

其他的唯一一个限制是字母对表示的长度是有向长度：如果选从 A 到 C 的方向为正方向，则线段 AC 的长度为正，线段 DB 的长度为负。

这至少是交比的原始概念。后来,人们发现:想知道四个点的交比根本没有必要知道它们之间的距离。由于距离不是射影几何学里的“射影性质”,所以与距离无关的定义和思想在这种几何学里起着特殊作用。彭赛列仍旧使用距离来定义射影概念的事实表明了:他还没有完全从欧几里得几何学的思想里解放出来。在这两种几何学中,他仍然认为欧几里得几何学更为基本,但进一步的研究却表明:情况恰恰相反。

彭赛列也发现了射影几何学里一个美妙的、令人惊奇的性质——对偶原理。在对帕普斯定理和布里昂雄定理的讨论中,我们已经遇到了一个对偶性的例子。对于这两种情形,我们看到了如下的一个事实:如果将每个定理中的“线”和“点”这两个词互换,并在语法上对其他几处稍作改动,那么将得到一个正确的新命题。在射影几何学里,这个令人感到惊奇的性质——在一个定理中只要简单地互换“点”和“线”两个词,就会得到一个正确的新命题——是十分普遍的。只要证明了其中的一个命题为真,那么,通过“点”和“线”的简单互换,并作适当的语法修改以后,就会得到另一个真命题。当其中的一个命题为真时,两个命题就都是真命题。例如,德扎格定理及其对偶定理:

德扎格定理:

> 已知两个三角形,如果对应顶点确定的线相交于同一个点,那么由对应边确定的点都位于同一条线上。

德扎格定理的对偶定理如下:

已知两个三角形，如果对应边确定的点位于同一条线上，那么由对应顶点确定的线都相交于同一个点。

这两个命题都是真命题。在射影几何学里，对偶原理的发现导致了许多新定理的产生。只要将结论中的点和线两个词互换，再作适当的语法调整，并且重新表述这些定理之后，数学家们就可以简单地看待那些原来的定理——以前已经证明是正确的定理。事情就是那样简单。

对偶原理的存在确实有点儿让人惊讶。例如，在欧几里得几何学里，虽然我们能够找到独立的对偶陈述(例如帕普斯定理)，但它里面不存在对偶原理。在欧几里得几何学里，当互换“线”和“点”这两个词时，一般来说，会得到一个假命题。例如，虽然任意两个点确定一条线这个命题在欧几里得几何学里正确，但任意两条线确定一个点的命题却是错误的。(线平行时就是例外的情形。)

对偶原理的发现不能只归功于彭赛列一个人。蒙日的另一个学生，法国的数学家和战士热尔岗(Joseph Diaz Gergonne，1771—1859)也声称发现了对偶原理。热尔岗的父亲是一名画家和建筑师，他和一些文艺复兴时期的艺术家一样，开始研究射影几何学的基础。在热尔岗12岁时，父亲就去世了。热尔岗终生热衷于数学。但是，和法国的许多市民一样，他把成年早期的许多时光都投入到军事活动中。和布里昂雄一样，他在西班牙服役。最后，他定居下来研究数学，撰写有关自己的发现的文章。但是，在发表他的思想方面，热尔岗比那个时代的许多数学家都有优势，因为他有自己的数学杂志。虽然热尔岗最初称它为《数学纪事》(*Annales de*

mathématique pures et appliqués)，但这份杂志逐渐以《热尔岗纪事》(*Annales de Gergonne*)著称。当时法国许多最优秀的数学家的观点也发表在这份杂志上。例如，布里昂雄和彭赛列就在热尔岗的杂志上发表过他们的一些文章。

热尔岗和彭赛列之间存在着一些争执。除了争论到底谁是对偶原理的发现者之外，他们在表示几何学的最好方法上也持有竞争性的观点。彭赛列支持所谓的综合几何学，这种方法不含代数符号体系。人们经常把希腊几何学描述为综合几何学。例如，请大家注意：在第二章关于三角形的内角和等于两直角的证明里，涉及代数学。蒙日有时也使用综合方法。虽然这种推理随着分析学的诞生失去了优势地位，但在19世纪上半叶数学家们又开始使用综合方法。热尔岗认为代数学语言能最好地表示几何事实。也就是说，他支持分析的方法。

虽然彭赛列和热尔岗富有竞争性的观点和主张起初看起来是非常平和的，但他们之间的争论最后变得异常激烈。回顾起来，对偶原理很可能是被人们同时发现的其中一个例子，将其归功于某个人是不公平的。但是，关于是综合方法还是分析方法促进了几何学里的发现的问题，现在大体上已被解决。当代的绝大多数数学家偏爱分析方法。

射影几何学——一门成熟的数学分支

尽管彭赛列和热尔岗之间有分歧，但两位数学家在射影几何学的研究里都使用了度量的概念。虽然他们的思想有许多新颖的

方面，但两人仍旧在欧几里得几何学的框架内研究射影几何学。在欧几里得几何学里，距离和角度是基本的概念。但是，为了真正地理解射影几何学以及它在数学中的地位，完全从度量中摆脱出来是有益的，德国数学家施陶特（Karl Georg Christian von Staudt，1798—1867）对此作出了贡献。

与法国的数学家布里昂雄、蒙日、彭赛列和热尔岗不同，施陶特过着平静的生活。他出生于德国的罗滕堡（Rothenburg），并在那里长大成人。年轻时，他跟随19世纪最多产的数学家之一——高斯学习。在高斯的指导下，施陶特开始研究天文学，但最终将注意力转向了几何学，尤其是射影几何学。施陶特对几何学的贡献在技术方面比较少，更多的是在哲学方面。他的成就是用完全摆脱长度的方式重新阐述了射影几何学里的思想，包括交比的概念。实质上，他证明了射影几何学是几何学的一个独立分支，人们不需要使用欧几里得几何学中的任何结果来理解射影几何学。换句话说，人们不使用欧几里得、阿波罗尼奥斯和阿基米德的概念，仍能发展射影几何学。

19世纪，由于数学家们发现了许多新的几何学，所以施陶特的贡献显得十分重要。数学家们发现了许多种十分不同的方式用来思考点、线、平面和空间。他们发现几何学不止有一种，而是有许多种。数学家们接下来要尝试解决的问题就成了：这些不同的几何学是怎样相互联系的，他们想知道每种新几何学有多少内容是真正新的，而又有多少内容只不过是以新颖的方式重述了以前的思想。施陶特的工作证明了射影几何学的确是一门新的几何学分支，它不单单是以一种特殊方式来看待欧几里得理论的。

在整个19世纪，射影几何学里的思想和方法一直都吸引着领

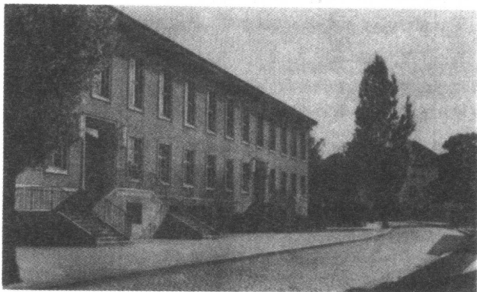
头数学家们的注意力。但在接近这个世纪的尾声时，人们对它的兴趣开始减退。也许19世纪射影几何学中最后的一个伟大发现应该归功于德国的数学家克莱因(Felix Klein，1849—1925)的努力。

克莱因过着学者般的生活。他曾经就读于波恩大学。毕业后，他先后在几所不同的大学里执教，埃尔朗根大学和哥廷根大学就是他曾经工作过的地方。克莱因是一位极富有想象力的数学家，他对重要的问题都感兴趣。在19世纪，几何问题是许多最优秀的数学家所思考的问题。在这个世纪，人们见证了其他许多几何学的产生。射影几何学吸引了大多数人的注意，但当数学家们意识到也存在其他不同的几何学时，他们开始自由地创造和研究他们自己发明的几何学，几何学这棵大树变得越来越繁茂。对于一个局外人来讲，几何学看起来成了一个由随意的问题和答案构成的集合。克莱因提出了这样的问题：这些几何学之间有什么关系？

用于揭示当时已知的、不同的几何学分支之间的逻辑联系所必不可少的思想，早在几十年以前就得到了发展。但是，这些必不可少的思想不是几何学的一部分，而是代数学的一部分。当几何学变得越来越繁茂时，数学家们发展了新的思想工具来研究数学的结构，这些新思想属于代数学的领域，现在被称作群论的数学分支就是这样的一种思想。正是借助于群论，克莱因才能够重新统一几何学领域。

从19世纪早期开始，伽罗瓦(Evariste Galois，1811—1832)和阿贝尔(Niels Henrik Abel，1802—1829)这两位数学家发明了一种思考数学的新方法。他们开始认识到表面上差别很大的数学存在着某些共同的逻辑结构。他们注意到这样的事实：在算术和分析里，

几何学和代数学里存在着同样的逻辑结构。其中最著名的一个结构——群论，被证明是一个十分有用的工具，它有助于数学家理解数学如何“起作用”。



在希尔伯特、克莱因和诺特生活的那段时期里，哥廷根大学的数学建筑。在19世纪和20世纪的前三分之一的大部分时间里，在这座不起眼的建筑里所作出的数学发现比世界其他任何地方都多。（Courtesy of University of Göttingen）

“群”是一个满足某些限制条件的符号集合，其中任意两个元素都可以结合生成群里另外一个元素。当然，我们也可以给这些符号赋予某种含义，可以说这些符号代表数或者几何变换，还可以赋予它们其他的一些解释，对符号的解释依赖于提出的问题和想要研究的对象。但是，符号的解释与群没有关系。我们完全有可能在不对符号作任何解释的情况下研究群。群的准确定义与这里没有直接关系，重要的是存在每个群都满足的某些法则(规律)，以及一个群不同于另一个群的其他法则(规律)。数学家们对群进行

当代射影几何学

从20世纪早期开始，人们对射影几何学基础这个领域没有太多的研究，但是这个领域并没有被完全忽视。多伦多大学有一个著名的几何学系，考克斯特(Donald Coxeter)是20世纪这所大学里一位重要的几何学家，他得到了几个有关射影几何学的有趣结果。我们仍然可以这样说：自克莱因的工作之后，数学家们把自己的注意力都转向了其他学科。射影几何学是一门成熟的学科，虽然它里面绝大多数重大的理论问题现在都已经得到解决，但这不是射影几何学的结束。

20世纪晚期，数学家们和爱好数学的计算机程序员又对射影几何学产生了兴趣。他们对编写这样的计算机程序感兴趣：这些程序是在呈平面的(二维)计算机显器上表示三维对象所必不可少的内容。在一个显器上表示一个三维的图像要求我们能够在屏幕上正确地投射图像。从本质上来讲，这和文艺复兴时期艺术家们所面临的是同一个问题。不同之处是这里的工具不再是画笔，而是计算机程序。计算机程序员的目标是写出指令，而这些指令对于计算机从许多角度来表示一个三维的曲面是必需的，对于让得出的图像和所给物体相似也是必要的。这是达·芬奇和丢勒都非常熟悉的问题，它也是这个数学问题如何周而复始的一个好例子。文艺复兴时期的艺术家们正在为他们发展的方法寻找数学基础，他们的目标是发现对于更好地表示一个场景或对象所必需的数学。既然数学已经得到了充分发展，目标就成了编写符合要求的软件。从艺术上来

讲，这些软件包含着在二维曲面上表示三维对象所需要的许多数学知识。

射影几何学的另一个应用涉及计算机视觉。因为一个物体的外观随着观察者的视角而改变，所以从不同的位置去识别一个物体依赖于辨别出哪些性质在射影变换下保持不变。射影几何学里的概念使得对平展的、奇怪的计算机图像的解读变得容易。数学家们寻找表示表象艺术的数学基础已经有500年的历史了。从此以后，射影几何学中的思想将吸引越来越多的数学爱好者，并且帮助人们实现在艺术上的远大抱负。

分类时所依据的正是两个群之间的不同。

克莱因的方法是研究每种几何学所特有的运动集合。所有具有这样特征的运动构成一个群，每种几何学都和一个运动群相关。例如，定义欧几里得几何学的运动集合是应用于任意一个图形的所有旋转和平移构成的集合。（在“平移”中，图形沿着直线运动而没有旋转。）我们称这两种运动为欧几里得运动。欧几里得几何学中的几何性质——长度和角度——恰好是那些在每种欧几里得运动下保持不变的性质。进而，这样的两种运动能够结合生成第三种运动。这通过如下的方式来实现：对一个图形先作一种运动（例如，平移），然后再对这个图形作另一种运动（平移或者旋转）。我们称这样的两种运动的结合为运动的积。用这种方法结合产生的所有的这样的运动，它们所构成的集合是欧几里得运动群。一旦这种方法行得通，克莱因就可以抛开群是运动集合的解释，而只是研究那个群本身的具体结构。

克莱因借助施陶特对射影几何学思想的重新表述，发现所有

群和几何学

在数学中，群由一个符号集和一种运算构成。我们有时候用$(G,\cdot)$这样的一组符号来表示它。字母G表示对象集，大家可以称G是集合$\{a,b,c,\cdots\}$。$(G,\cdot)$中G后面的点表示用来结合对象的运算。群的运算与乘法有点类似，每个群都满足下面四条性质：

1. 如果a和b属于G，那么$a\cdot b$（a和b的乘积）也属于G。
2. 如果a、b和c都属于G，那么$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$成立。即，我们可以先让$a$和$b$结合，然后再和$c$结合，或者先让$b$和$c$结合，然后再和$a$结合，最终的结果相同。
3. 每个群都存在唯一一个称作单位元的特殊元素，通常用字母e来表示。单位元具有下述性质，对于G中任一其他元素，都有$e\cdot a=a\cdot e=a$成立。即，无论怎样让e和a结合，结果总是a，这里a表示G中任一其他元素。
4. 最后，G中的每个元素都存在唯一一个逆元：如果a是G中的任一元素，那么G必定也包含另一个被称作a的

射影运动构成的集合也是一个群，这个运动群里的元素使得其他的性质——例如，交比或圆锥曲线的性质——保持不变。（虽然几何学家通常称射影“运动”为射影变换，但思想是一样的。）他还发现：与欧几里得运动群相比，所有射影运动构成的群有一个稍微复杂一些的结构。

上述这些认识使得克莱因能够用运动群来比较射影几何学和

逆元的元素，通常用 a^{-1}来表示，它满足 $a \cdot a^{-1} = e$。

如果这些内容听起来太抽象而没有什么用处，请大家注意正有理数集关于乘法运算构成一个群：(1)如果将任意两个正有理数相乘，结果是另一个正有理数；(2)乘法满足结合律；(3)单位元是数 1；(4)任一正有理数 a 的逆元恰是 $1/a$。

一旦数学家们系统地表述了群的定义以后，他们发现群无处不在。此外，他们在逐渐理解群的抽象数学性质中取得了突破，这些突破使得人们洞察到群的更为"实用的"表示，他们对群论的一些最早期的应用仍旧被视为经典。19 世纪早期，群论被用于解决到那时为止数学里最难以驾驭的问题。几个世纪以来，数学家们一直在试图寻找一个与二次公式类似的公式，用它来解决某些类型的代数方程。借助群论可以证明，他们苦苦寻找的公式并不存在。这一发现证明了群论的威力，但这仅仅才是开始。现在，群论被应用于理论计算机科学、物理学和化学，科学家们用它来寻找和探索信息论、原子物理和材料科学中有关的结构信息。群论也是许多数学分支里的工具，它是代数学领域中的一个独立分支。

欧几里得几何学。这种描述揭示了欧几里得几何学和射影几何学是如何彼此相关的。不过，克莱因研究得更为深入，他借助运动群成功地实现了对现有的几何学的分类。在概念方面，这种思想与生物学家对动物的种类加以比较的思想类似。生物学家寻找结构和功能的相似之处和不同之处，并用这种信息来建立一种分类，这种分类表明了不同的动物种类是怎样联系的。当然，为了做到这

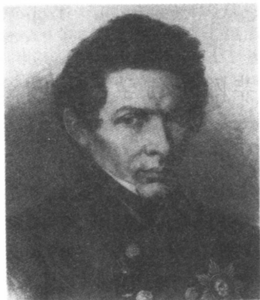
一点,他们不得不比较各种动物的大体结构以及其他一些不是用眼睛就能够立刻看到的特征。克莱因用一种数学方法做到了这一点。首先,他描述了与每种几何学有关的运动群;然后,他使用这些信息对两个群进行比较,这种比较揭示了不同的几何学是如何相互联系的。总体而言,克莱因的研究恢复了几何学领域里的秩序。由于他在埃尔朗根大学就开始致力于这项工作,所以他的这些研究以这所大学命名,称为埃尔朗根纲领。他的论断在今天仍旧是几何学的一个重要部分。

克莱因对欧几里得几何学和射影几何学之间的比较显示了两者有着惊人的联系。他发现:对于每种欧几里得运动,总对应着同一类型的一种射影运动,但有许多射影运动不是欧几里得运动。这个发现证明了:射影几何学比欧几里得几何学更为基本。实际上,欧几里得几何学是射影几何学中一种非常特殊的情形,后者的范围更大,包含的内容更多。

第七章　非欧几何学

19 世纪,人们见证了所谓的非欧几何学的诞生。虽然射影几何学是与欧几里得几何学完全不同的一个几何学分支,但它似乎仍具有直观的特点,因为我们可以把它理解成在一个二维平面上表示三维图像的问题。现代读者对射影的思想好像并不陌生。然而,一些非欧几何学违背了我们通常的空间观念。我们在这一部分里描述第一种非直观的非欧几何学,与这种几何学有关的描述甚至对现在许多人来说也是陌生的。当第一次提出这种非欧几何学时,许多人认为它非常荒唐可笑。因此,绝大部分人忽视了这种新几何学的创立者,这些创立者们偶尔还会因为这项工作而被别人耻笑。第一个受到嘲弄,但后来又由于同过去的理论彻底决裂而出名的人是俄国的数学家罗巴切夫斯基(Nikolai Ivanovich Lobachevsky,1792—1856),有时候人们称他是“几何学的哥白尼”。与其他人不同,他致力于证明:有可能存在与欧几里得几何学根本不同的几何学。

罗巴切夫斯基出身于一个贫穷的家庭,兄妹共三人。在他 7 岁时,父亲就去世了。尽管困难重重,但罗巴切夫斯基最后还是进入了喀山大学,学习数学和物理学。他在一生的绝大部分时间里担任喀山大学的教师和行政人员。作为一名教师,他教授过许多门不同的数学和物理课程。作为一名行政人员,他在喀山大学担



罗巴切夫斯基。虽然罗巴切夫斯基关于几何事实的本质的见解意义深远，但在他的有生之年里几乎没有引起人们的注意。（Library of Congress, Prints and Photographs Division）

任过多种职位。为了把这所大学办成更好的大学，他生前鞠躬尽瘁。罗巴切夫斯基以一种较快的节奏工作着，良好的教育使他免于苦难的生活。他显然认为：教育对于其他人来讲也是一条积极向上的道路。他为确保喀山大学的每个学子都受到良好的教育而奋斗终生。对于罗巴切夫斯基来讲，这所大学在许多方面都和自己的数学一样重要。

罗巴切夫斯基对欧几里得第五公设的问题着迷。我们在这本书的第三章里已经详细叙述了这个公设，有时人们也称它为平行公设。其内容是：

> 若一条截线与另外两条直线相交，且在截线某一侧的两个内角之和小于两直角，则两条直线在该侧相交。
>
> （*Euclid of Alexandria*. Elements. *Translated by Sir Thomas L. Heath*. Great Books of the Western World. *Vol. 11*. *Encyclopaedia Britannica*, *1952*.）

参见 36 页的插图。人们对第五公设感兴趣起源于看起来非常明

显的事实。对于许多数学家来讲，证明如下的事实似乎是可能的：第五公设中的两条线相交，而且它们必定在欧几里得指出的那一侧相交。这个事实对于他们是显而易见的——对于我们中的绝大多数人也是一样——当两条线看起来好像要相交时，证明它们事实上也相交应该是可能的。在很长一段时间内，人们似乎没有必要给出一个单独的公设来说明这样一个事实：讨论的这两条线实际上会相交。接下来，这个目标变成了：通过使用欧几里得的除第五公设之外的所有公理和公设，证明两条线会相交。在两千年的时间里，数学家们试图证明第五公设，他们努力的结果是：第五公设问题变得和希腊几何学里三个经典的、尚未解决的问题——三等分任意角、化圆为方和倍立方体——一样出名，也成了一个很难解决的问题。

到罗巴切夫斯基开始试图证明第五公设时，数学家们已经有了2 000年的失败记录，他们关于第五公设是欧几里得的其他公理和公设的逻辑推论的许多“证明”已经提出很久了。但是，每当人们更为细致地考察时，都会表明如下的一个事实：为了“证明”欧几里得第五公设，每个证明实际上都假设了它是成立的。所有这些所谓的证明都被否定了，因为从逻辑上来讲，它们根本就不是证明。我们不可能在证明一个命题是正确的同时，还在证明过程里使用这个命题。到 18 世纪末，人们对试图证明第五公设的模式变得特别熟悉(随之而来的是失败)，以至于一些数学家开始提出这样的观点：欧几里得毕竟直接得到了它。他们开始认为：从数学上来讲，第五公设不是欧几里得几何学里其他公理和公设的逻辑推论，而是一种孤立的思想。我们可以接受它或者否定它，但不能够证明它是欧几里得几何学里其他公设、公理和定义的推论。

用这种方式表达的、有关欧几里得第五公设的论证给许多人留下的印象是十分合情合理的。正是下一步——罗巴切夫斯基借助自己的想象力在观念上大胆提出的一步，我们中有许多人感觉仍然很难接受。为什么会这样？事实是：虽然许多人没有深入地思考过欧几里得几何学，但我们大部分人毕竟在欧几里得几何学有时想要表述的内容上投入了大量智力和情感，甚至我们周围的一切。这是导致罗巴切夫斯基的观点引起争议的原因。

为了理解罗巴切夫斯基的观点，我们重新表述一下第五公设。它的一个替代公设可以表述如下：

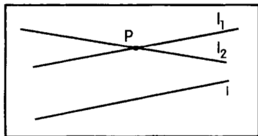
> 已知一条直线 l 和 l 外的一点 P，过 P 点仅能作一条与 l 平行的直线。

如果假定欧几里得的第五公设成立，则我们能够证明这个替代公设也成立。在这种意义下，这个替代公设与欧几里得的第五公设在逻辑上是等价的。此外，如果在一开始就假设这个替代公设成立，那么我们也能够证明欧几里得的第五公设也成立。简述为：第五公设成立当且仅当它的替代公设成立。

罗巴切夫斯基的见解的伟大之处在于：如果第五公设真的独立于欧几里得几何学的其他公理和公设，那么他仅需用一个不同的公设去替代第五公设，就能够建立一种新的、在逻辑上相容的几何学。罗巴切夫斯基用如下的公设去替代第五公设：

> 已知一条直线 l 和 l 外的一点 P，那么至少存在两条过 P 点且与 l 平行的直线。

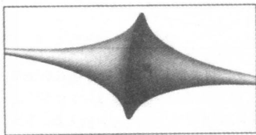
换句话说，存在两条不同的过 P 且与 l 平行的直线，我们给它们标号为 l_1 和 l_2（参见插图，我们强调 l_1 和 l_2 都位于该图所在的那个平面上）。在罗巴切夫斯基的几何学里，l_1 和 l_2 都与 l 不相交，这并不是因为它们不能够延长得足够远，而是因为它们都与 l 平行。对于许多人来讲，下面这一点也是"显然的"：如果我们将 l_2 与 l 延长得足够远的话，最终它们必定会相交，但不可能证明这种想法。证明了 l_2 与 l 相交等价于证明了欧几里得的第五公设！虽然这是罗巴切夫斯基在概念上不得不跨越的困难，但是一旦克服了这个困难，他就会发现自己能够建立一种在逻辑上相容的几何学。



罗巴切夫斯基用如下的公设来替换第五公设：已知一条直线 l 和 l 外的一点 P，存在两条不同的过 P 点且和 l 平行的直线。

罗巴切夫斯基的几何学是第一种所谓的非欧几何学，因为它是从一个不同于欧几里得几何学的公理和公设集出发建立的。虽然它违背了我们对周围世界的认识，但违背人们的认识与数学无关。例如，在罗巴切夫斯基的几何学里，三角形的内角和总小于 180°。而在欧几里得几何学里，三角形的内角和总是精确地等于 180°。我们要强调这样一个事实：在数学上，罗巴切夫斯基的几何学并不是错误的，它在逻辑上是自相容的，我们在数学里不能够再多要求什么。的确，它是一种不符合大多数人的通常观念的几何学，但从数学上来讲，它不包含错误。从数学家的角度来看，罗巴切夫斯基的几何学和欧几里得的几何学一样正确。

人们很容易把罗巴切夫斯基的见解看作是在玩智力游戏,毫无意义而不予理睬。对于我们绝大多数人来讲,如下的一个事实也是“明显的”:在前面的图里,l_2 和 l 相交。但是,把罗巴切夫斯基的认识看作纯粹的形式主义而不屑一提是错误的。罗巴切夫斯基开创了几何学的全新概念,它们在数学和科学里都有重要的延伸。自从20世纪早期爱因斯坦发表了自己关于相对论的观点以后,许多数学家和物理学家就一直忙于得出这个理论的逻辑结果。为了正确评价罗巴切夫斯基的贡献,大家注意到下面这一点是十分重要的:从本质上来讲,爱因斯坦的观点使用了非欧几何学。罗巴切夫斯基的观点、思想对于同时代的许多人来说太陌生了,因此在当时并没有受到人们的重视和正确的评价,但他渴望并且继续积极地发表那些观点和思想,这使得它们在20世纪的突破成为可能。



我们可以通过研究伪球面上的几何学来实现罗巴切夫斯基的几何思想。

罗巴切夫斯基不是唯一一个发现非欧几何学的人。其他三个人也发现了非欧几何学。虽然罗巴切夫斯基先发表了这方面的著作,但对其他人没有产生影响。每个人都独立地发现了非欧几何学。另一位人们经常提到的、与非欧几何学的发现有关的数学家是匈牙利的波尔约(János Bolyai,1802—1860)。波尔约从父亲那里受到了早期的数学教育,后来就读于维也纳的皇家工程学院。他的父亲,F.波尔约(Farkas Bolyai),是一位学识渊博的数学家,曾经长期致力于证明第五公设是欧几里得几何学里其他公理和公设的

推论。他告诫当时已经是一名年轻的军队教官的小波尔约:不要研究第五公设了,那只能够让你失望。

这个警告可能对波尔约有影响,但没有达到父亲期望的那种效果。波尔约确实研究了第五公设,但不是花费大量时间努力去证明它,而是用自己的公设去替代第五公设,他的公设假定:已知一条直线和该直线外的一点,过这点存在无数多条与已知直线平行的直线。(这个假设与罗巴切夫斯基的相似,但不相同。)波尔约接下来研究用自己的公设替代第五公设后导出的几何学。

波尔约关于非欧几何学的发现被冠以"绝对真实的空间科学"(*Absolute Science of Space*)的标题,并作为其父的一本著作的附录发表。他父亲的这本著作有一个很长的、迷人的书名——《为好学青年的数学原理导引》(*An Attempt to Introduce Studious Youth to Elements of Pure Mathematics*)。和罗巴切夫斯基的几何学一样,波尔约的几何学也是自相容的,因此在数学上也是正确的。和罗巴切夫斯基的著作一样,波尔约的"绝对真实的空间科学"也是对过去的几何学思想的突破。虽然在罗巴切夫斯基首次发表自己的思想几年之后,波尔约的这个附录才发表,但两位数学家发展自己的思想是在同一时期内。

和罗巴切夫斯基一样,波尔约关于非欧几何学这项发现的重要性在他的有生之年里没有得到人们的承认。然而值得注意的是,波尔约和他的父亲都是"文艺复兴时期的人"。父亲除了是一名数学家之外,还是一位诗人、剧作家和音乐家。儿子除了是一名有才华的数学家之外,还是一个小提琴奇才和有名的击剑手。

与非欧几何学的发展有关的另两位是德国的数学家和物理学家高斯(Carl Friedrich Gauss,1777—1855),以及名气相差很远的施

我们生活的空间是欧几里得空间吗?

高斯知道罗巴切夫斯基描述的非欧几何学中的一个结果是:三角形的三个内角之和总小于180°。(在欧几里得几何学里,三角形的内角之和总是恰好等于180°。)此外,在罗巴切夫斯基的几何学里,我们也能够证明这样一个结论:当三角形的面积增大时,它的内角之和会变小。这些互相对照的、有关三角形角度的定理给高斯提供了这样的一个机会:高斯将我们生活的这个世界与欧几里得几何学里的定理作比较,以及和罗巴切夫斯基的非欧几何学中的定理作比较。为了比较现实世界和这两种几何学中的结论,高斯只需要测量真实三角形的角度,观察三角形的三个内角之和是否等于180°。通过精确的测量,有可能在理论上确定哪种几何学更准确地反映了现实世界。高斯认为,三角形内角的精确测量或许能够使他确定出现实空间不是欧几里得空间。

但是,没有人能够确保这种方法能成功。就像高斯熟知的那样,困难产生了,那是因为他计划用测量的结果来检查数学结果。数学是一门精密的科学,测量必定是不精确的。当我们在数学中断言三角形的内角之和等于180°时,也就断言了不能通过测量证明的某些论断。无论测量得有如何精确,我们的测

韦卡特(Ferdinand Karl Schweikart,1780—1859)。高斯是19世纪最杰出的数学家和物理学家之一。虽然他进入大学时学的是语言学,但不久就对数学产生了浓厚的兴趣。他的博士论文里包含有对现在称之为代数基本定理的证明。就像这个定理的名字所暗示

量里总存在某些误差。虽然高斯的测量或许不可能证明三角形的内角之和恰好等于180°，但他也有可能证明三角形的内角之和不等于180°。如果他的误差小于180°与测到的三角形的度数之差，他在这方面就会获得成功。如果高斯能够证明三角形的三个内角之和不是180°，那么他就能够证明欧几里得几何学不是对我们现实世界完全准确地刻画了。但是，如果所有他能够证明的都在自己测量的精度范围之内，三角形的三个内角之和就可能等于180°，那么他就什么也没有证明。高斯开始寻找反面的结果。

幸运的是，高斯有机会指导、监督庞大的测量工程。作为他的工作的一部分，他派人将高度精确的装置放置在三个距离遥远的山顶上——由此构成一个三角形——他使用这些装置在这个三角形的顶点处(位于三个山顶)做了一系列测量。我们回顾一下高斯所熟悉的非欧几何学中的一个定理：三角形的面积越大，三个内角之和就越小。因此，所测量的三角形越大，观察到实际三角形的内角之和与180°之间有所不同就应该越容易，这是他用相距甚远的山顶作为三角形顶点的原因。但是，在高斯的测量的精度范围内，他不能够证明欧几里得的断言(三角形的三个内角之和等于180°)是错误的。

的那样，它是代数学这一领域内一项十分重要的认识。高斯最后在哥廷根大学就职，他在自己的整个学术生涯里一直都担任着这所大学的数学教授和天文台台长。在他的众多兴趣之中，高斯也曾经思考过欧几里得的第五公设，并考虑使用一个与欧几里得的《几何原本》不同的公理和公设集建立一种几何学的可能性。但

是，高斯害怕引起争议，而且他认识到：发表非欧几何学的结果可能要使人们对他的愤怒大于理解。他对自己的大多数观点闭口不谈，也没有发表过这方面的著作。但是，他确实和一位持同一观点的法律教授施韦卡特通过信。我们对施韦卡特的情况几乎一无所知，但不管什么原因，施韦卡特也没有发表自己的观点和思想。

这些关于非欧几何学的早期观点和思想，是在许多人，甚至是在许多数学家乐于接受它们以前提出的。但是，这些新思想最终为从一种新的视角去看待几何学铺平了道路。在数学意义下，还存在其他的几何学。就像科学家和数学家们逐渐习惯了这样的思想一样，令他们大为吃惊的是：人们发现自然界里也存在其他的几何学。一些新几何学后来被证明既有物理意义，也有数学意义。

第三部分　坐标几何学

第八章　解析几何学的起源

这卷书前三分之二的篇幅里几乎没有方程，那是因为这些几何学主要是在没有代数符号体系的基础上发展起来的。虽然我们不需要使用代数学来研究几何学，但是代数学确实对几何学有巨大的帮助，在其研究过程中使用的概念和方法有时会令困难的几何问题变得易于处理。解析几何学——其问题和解都是用代数学来表示的一门几何学分支——的发现，加速了数学和科学的进步，这是因为它能够使科学家和数学家有机会用源自几何学和代数学的观点来更好地理解两者。

从文艺复兴时期开始，欧洲的代数学变得越来越抽象。尤为重要的是，人们更多地使用了专门的代数符号。当法国数学家和律师韦达(François Viète，1540—1603)首次使用字母来表示不同类型的对象时(与我们最初学习"令 x 表示未知量"的方式类似)，这标志着他达到了一种新的抽象水平。现在，虽然这已经是一种常见的、往往不能得到正确评价的代数方法了，但它的重要性再怎么夸大也不过分。韦达通过使用字母来表示不同类型的对象，发现了一种新的语言，这种语言能够用于表示所有类型的逻辑关系。尤其是，他找到了一种能够用于研究点、线、体和其他几何对象之间关系的语言，它有改变数学家们的几何学观念的潜力。

然而，为了将代数学和几何学这两门学科融合起来，数学家们

需要确定这两门孤立的学科之间的概念“桥梁”。坐标起到了代数学和几何学之间的桥梁的作用,它使得数学家们能够把几何空间理解为可以在代数学中处理的数集。那么,什么是坐标呢?

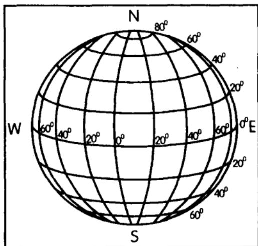
坐标是有序的数集。“有序的”这个词强调这样的事实:坐标(1,3)和(3,1)是不同的。坐标系能够在数集和空间中的点之间建立一种对应关系,这必定用如下的一种方式来实现:空间中的每个点都可以用一组坐标来确定,每组合适的坐标都能够确定空间中唯一的一个点。

所谓的实数直线就是这种现象的最简单例子,它上面的所有点可以与实数集构成一一对应。为了构造出这个对应,我们在直线上选一个点,并称那个点为0。0左边的点与负数集对应,0右边的点与正数集对应。接下来,我们再在直线上0的右边选一个点,并称之为1。从0到1的距离给出了这条直线的一个标度。现在,这个对应就固定下来了。例如,与2对应的点位于0的右边,且它到0的距离是到1的距离的两倍。事实上,给定任意一个数,我们总能够确定与它对应的那个点;反过来,已知实数直线上的任意一个点,我们总能够确定与它对应的那个数。在这种情形下,我们称实数与实数直线上的点之间的对应是一一对应:对于每个点,存在唯一的一个数;对于每个数,存在唯一的一个点。

经线和纬线构成一个坐标系,它能够用来确定地球上的任意一个位置,这是坐标——在这种情况下,坐标是有序数对——与球面上的点之间对应的一个例子。按照惯例,第一个坐标是经度,它确定了我们所关心的位置位于本初子午线以东或以西的度数(我们选本初子午线为0°)。经度告诉人们这个位置位于连接北极和南极的哪条线上。仅仅知道经度还不足以确定地球上的一个位

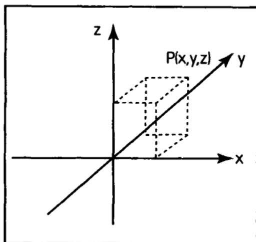
置,它没有给出我们关心的位置在经线上所处具体位置的有关信息。这就是第二个坐标——纬度——的作用,纬度确定了那个位置位于赤道以南或以北的度数。那条经线和纬线的交汇处就是我们要找的点的位置。(我们注意到这样一个事实:这个方案里有两个点例外,即南极和北极。地球上只有一个点位于赤道以北 90°,即北极,所以没有给出纬度的必要,南极也一样。)

上述方案能够在任意一个球面上实现。我们先确定"北极",北极可以任意选取。一旦确定了北极,南极的位置也就随之确定。设想在北极有一条穿入球面并且经过球心的直线,这条直线离开球面的那一点是南极。赤道是球面上到两极的距离相等的所有点构成的集合,这个点集构成一个圆。我们在这个圆上选取单独的一点,并称这个点为 0。连接北极和南极的,且通过 0 的那条经线是本初子午线。这个方案到此就完成了。现在,球面上的每个点都可以用两个数来确定。经度,确定了每个点位于本初子午线以东或以西多少度;纬度,确定了每个点位于赤道以北或以南多少度。



确定球面上点的位置的坐标系。

另一个坐标系的例子是用来确定三维空间中点的坐标系。首先选取单独的一个点(称为原点),再画三条过原点且互相垂直的实数直线。我们称其中的一条线为 x 轴,另外的两条线分别为 y 轴和 z 轴,每条线都是仿照已经描述过的实数直线的方式作出的。



确定三维空间中点的位置的坐标系。

现在，空间中的每个点都能由三个“坐标”唯一确定（参见插图）。坐标必须总是以同样的方式列出：按照惯例，第一个坐标是 x 坐标；第二个是 y 坐标；最后一个是 z 坐标。因此，由 1、2、3 这三个数所确定的点(1,2,3)与(3,2,1)是不同的。

除了这里所描述的坐标系之外，为了寻找更为方便的、有效的方式来刻画各种不同的空间，多年以来，数学家和科学家们也建立了其他许多十分不同的坐标系。

梅内克缪斯和佩尔格的阿波罗尼奥斯

梅内克缪斯(Menaechmus，约公元前 380—前 320)是当时一位著名的希腊数学家。令人遗憾的是，他的著作没有一本能够流传到现在。我们主要通过希腊其他的哲学家和数学家的著作，才对梅内克缪斯有所了解。更为糟糕的是，关于他的生平以及他对数学的贡献，我们能够确定的很少。人们说他是欧多克索斯的一名学生。众所周知，梅内克缪斯曾经研究过圆锥曲线。一些学者主张：正是他创造了“抛物线”“双曲线”和“椭圆”这些术语。他似乎也处在发现一种通过坐标系来表达几何关系的方法的边缘。

梅内克缪斯与发现“比例中项”的问题最密切相关了。从代数上来看，这个问题很容易表达：已知两个数，不妨用字母 a 和 b 来表示，找到两个未知数——称它们为 x 和 y——满足 $a/x = x/y$ 和 $x/y = y/b$。(这种表述十分简单，只因为它是用现代的代数符号来表示的。梅内克缪斯的刻画几乎必然是比较复杂的。)从这两个方程中的第一个来看，能够推出 $ay = x^2$，这是对一条抛物线的标准的代数刻画。第二个方程告诉我们能够用 y/b 来代替第一个方程中的 x/y。如果那样做了，并且交叉相乘，就会得到 $ab = xy$，这是一条双曲线的方程(也是用现代的符号)。这个问题好像在暗示我们：梅内克缪斯正在用某种普遍的方式来看待变量之间的关系。因为没有代数学的知识，所以他用线段、曲面和曲线来表达这些思想。但是，从他对这个问题的叙述到我们对同一问题的比较现代化的坐标刻画并不是一个大的飞跃。

人们有时称梅内克缪斯是第一位使用坐标的古代数学家。因为我们太习惯于使用坐标来确定包括从棋盘到空间的每个事物的位置，所以梅内克缪斯似乎也很可能做了类似的工作，但是当时希腊人不具备代数学的知识。对于我们非常容易作出的概念上的跳跃，可能已经超出了梅内克缪斯用他自己的方法所能够认识到的范围。

另一个与现代的坐标观念接近的人物是佩尔格的阿波罗尼奥斯。他是古希腊数学史上的主要人物之一，其传记以及贡献已经在此书的其他地方叙述过了。因为阿波罗尼奥斯确实发明了一种坐标系，所以他在古代数学家中是独一无二的。

虽然阿波罗尼奥斯是一位多产的数学家，但他的许多著作都没有流传到现在。他的绝大部分著作为人所知，只是因为在其他

数学家的著作里提到了它们。《圆锥曲线论》(*Conics*)就是其中一本流传到现在的、几乎完整的重要著作,书中讨论的是所谓的圆锥曲线(抛物线、双曲线和椭圆)的数学性质。正是在《圆锥曲线论》这部著作里,我们发现人们第一次系统化地使用了坐标系。

阿波罗尼奥斯对坐标的理解和使用与我们所熟知的有着很大的不同。现在,我们一般从坐标系开始。设想有两条线,即坐标轴,然后在这些线上画出自己感兴趣的曲线,这是阿波罗尼奥斯从未做过的工作。阿波罗尼奥斯从刻画圆锥曲线出发,然后将其作为解决与重要的圆锥曲线有关的某些问题的一种工具,使用圆锥曲线本身构造出了一种坐标系。他的其中一个坐标轴是一条与圆锥曲线相切的线,另一个坐标轴是圆锥曲线的直径(圆锥曲线的“直径”是一条对称轴)。在最终得到的坐标轴不是互相垂直的意义下,这种方法产生的是一个斜坐标系,这是现在普遍使用的坐标系和阿波罗尼奥斯的坐标系之间的另一个主要不同。现在,我们选择的坐标轴一般都是互相垂直的,主要因为这样很实用:互相垂直的坐标轴会简化某些类型的计算。但是,在理论上坐标轴没有互相垂直的必要。甚至当坐标轴倾斜时,平面内的每个点也能够用相对于斜坐标轴的唯一的一组坐标来确定。此外,借助互相垂直的坐标轴变得简单的运算使用斜坐标轴也仍然是可行的。但是,它们是比较笨拙的。

阿波罗尼奥斯开创的坐标系显然对同时代的人没有什么影响。甚至阿波罗尼奥斯也只是发现了这种思想有限的用处,坐标系确实能够使他用一种崭新的方式来构造数学空间,他甚至能够指出自己用这种新思想所解决的那些问题。但在很大程度上,却没有什么实际的应用。我们记得希腊人只是了解大约十二种曲

线。现在,坐标几何学有用的其中一个原因是:它给出了用来刻画许多种不同曲线的一个十分一般的方法。由于当时的数学词汇里只有少数的曲线,所以一般的希腊几何学家,尤其是阿波罗尼奥斯,没有理由去发展一种十分一般的、适用于自己研究曲线的方法。在很大程度上,阿波罗尼奥斯的坐标系是一种远远超越那个时代的思想。

笛　卡　儿

解析几何学是用代数学的方法进行研究的一个几何学分支。法国哲学家、科学家和数学家笛卡儿(René Descartes,1596—1650)总被人们冠以解析几何学发明者的光荣称号。为了纪念他,人们现在所使用的最普遍的坐标系——笛卡儿坐标系,就是以他的名字来命名的。虽然笛卡儿的数学方法既新颖又重要,但这只是他对西方思想的一小部分贡献。

笛卡儿出生在一个安逸的家庭里,父母都出身于富裕的家庭。不过,在笛卡儿还是一个婴儿时,母亲就去世了。父亲是一名律师,他形容笛卡儿是一个有着强烈好奇心的男孩,对什么都感兴趣。父亲尽自己所能让儿子就读于最好的学校——皇家学院,在那儿笛卡儿在语言学方面表现出了非凡的能力,他尤其善于用法语和拉丁语写作,对数学和科学也表现出特殊的兴趣。虽然老师给予他高度评价,但从笛卡儿本人的记录来看,因为他感到对自己所能够确定的一无所知,所以带着困惑,失望地离开了皇家学院。寻求确定性是笛卡儿的思想里的一个重要主题。

因为笛卡儿是律师之子,家里自然期望其成为一名律师。这

也是笛卡儿的哥哥所走过的道路。在离开皇家学院以后,笛卡儿就读于普瓦捷大学,虽然他在这所大学获得了法律学位,但他对律师这种职业不感兴趣。他对法律的漠不关心好像引起了自己和父亲之间的一些摩擦,但他并没有被吓住。在拿到法律学位后,他决定四处旅行去寻求我们称为"生活经验"的东西,这次寻求花费了大约10年的时间。



笛卡儿。他关于代数学和几何学之间关系的思想影响了这两个领域的发展。(Topham/The Image Works)

笛卡儿的第一次冒险活动包括参加荷兰的军队,成为拿骚的莫里斯领导下的一名军官,当时荷兰人正在为反对西班牙的独立战争而战。他参军没多久——可能是一年——然后就离开了。笛卡儿四处漂泊。他也加入过卷入其他战争的部队,然后又离开,但他亲身参加了许多战争这一点值得怀疑。他以"迟起床"出名。他也曾花费时间去寻找有意思的人来陪伴自己,一位新结交的朋友——荷兰哲学家、数学家比克曼(Isaac Beeckman)向他介绍了韦达的代数学,这是笛卡儿在学校不曾学过的一门学科。

在多次旅行中,笛卡儿曾经在德国、荷兰、匈牙利和法国居留过。他结识了那位尽其所能来推动整个欧洲科学发展的神父梅森,并与其结为好友。笛卡儿也由此开始被人们公认为是一位富

有洞察力和创新意识的思想家。最后,他决定找一个地方定居下来,开始就自己所学的东西进行写作。他来到了荷兰。虽然笛卡儿频繁改变住所,但在接下来20年的绝大部分时间里都是在荷兰度过的。

正是在荷兰度过的那段日子里,笛卡儿写出了使自己成名的几乎全部的著作。他研究了哲学、光学、气象学、解剖学、数学和天文学。然而,他的首要目标是创造一门新科学,它能够统一正在整个欧洲发展的彼此没有联系的、与数量有关的知识分支。他认为,只有事实还不够,他还要探寻自己的这些发现的哲学背景。笛卡儿的目标是建立一个能够包含一切的统一理论。

笛卡儿开始认为在很大程度上自己已经成功了。在笛卡儿看来,他的科学、数学和哲学完全是交织在一起的。虽然他的哲学思想不断受到人们严格的考察,但他的一些有关科学的思想后来被证明是错误的。另一方面,他在数学领域里的工作变成了主流的数学思想的一部分。在这一卷里,我们强调笛卡儿对数学的贡献;不过,笛卡儿可能是在一种不同的背景下理解自己的工作的。

笛卡儿在数学上的主要工作包含在《方法论》(*Discourse on method*)一书中。正是在这本著作里,他在解析几何学的基础方面作出了重要贡献。书中的许多内容都致力于阐述几何学和代数学之间的相互关系,但不全是新的。当笛卡儿使用几何学的语言来重述代数学的问题时,他等于在重新回顾前辈们取得的成果。伊斯兰的数学家早在几个世纪之前就做过同一类事情。但是,由于笛卡儿的符号比数学前辈的优越得多,所以他能够比较容易地处理更加复杂的问题。

笛卡儿在思想上的一个重要创新是他解释代数项的方式:前

448 ŒUVRES DE DESCARTES. 375.

Que ſi on veut, au contraire, diminuer de trois la racine de cete meſme Equation, il faut faire

$$y + 3 \infty x \quad \& \quad yy + 6y + 9 \infty xx.$$

& ainſi des autres. De façon qu'au lieu de

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \infty 0, \quad 5$$

on met

$$\begin{array}{r} y^4 + 12y^3 + 54yy + 108y + 81 \\ + 4y^3 + 36yy + 108y + 108 \\ - 19yy - 114y - 171 \\ - 106y - 318 \\ - 120 \\ \hline y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \infty 0. \end{array} \quad 10$$

Qu'en augmentant les vrayes racines, on diminue les fauſſes, & au contraire.

Et il eſt a remarquer qu'en diminuant les vrayes racines d'vne Equation, on diminue les fauſſes de la meſme quantité, ou, au contraire, en diminuant les 15 vrayes, on augmente les fauſſes; & que, ſi on diminue, ſoit les vnes, ſoit les autres, d'vne quantité qui leur ſoit eſgale, elles deuienent nulles, & que, ſi c'eſt d'vne quantité qui les ſurpaſſe, de vrayes elles deuienent fauſſes, ou de fauſſes, vrayes. Comme icy, 20 en augmentant de 3 la vraye racine, qui eſtoit 5, on a diminué de 3 chaſcune des fauſſes, en ſorte que celle qui eſtoit 4 n'eſt plus qu'1, & celle qui eſtoit 3 eſt nulle, & que celle qui eſtoit 2 eſt deuenue vraye & eſt 1, a cauſe que $-2+3$ fait $+1$. C'eſt pourquoy, en cete 25 Equation,

$$y^3 - 8yy - 1y + 8 \infty 0,$$

il n'y a plus que 3 racines, entre leſquelles il y en a

节选自《方法论》，展现了笛卡儿的代数符号。（Courtesy of University of Vermont）

几代的数学家都把像 x^2（x 的平方）的项解释成几何学上真正的正方形，把我们可以表为 x^3（x 的立方）的概念解释为几何学上的立方体。因为古希腊的数学家和继他们之后的伊斯兰数学家坚持对

x 的高次幂的这种几何解释，所以他们发现很难赋予诸如 x^4 这样的项一种含义，在这种解释里它将是一个四维的对象。笛卡儿抛弃了这种有局限的几何解释，从而改变了数学家们对这些符号的理解，也使得应用它们来研究更为容易。

笛卡儿也寻求用代数学的语言来重新表述几何学的问题，这是一个重要的创新。虽然这似乎是一个无关紧要的目标，但是借助图而不用代数符号来表示的综合几何，阅读和理解起来都十分费力。它是那么困难，以至于复杂的图和与此相伴的描述都成为前进的绊脚石。笛卡儿在这方面的目标是找到一种易于学会的，但表达同样概念的方法。他成功了，他的解决方法在于设想要解决的几何问题已经解决。他提出给每个量（已知量和未知量）起名字。已知量直接来源于问题，它们用数来表示；未知量用选定的字母来表示，表明它们是要被确定的量。接下来他用方程的形式表述了这个问题，并用代数方法加以解决了。当然，这只是当我们"设 x 表示未知量"时所做的工作。《方法论》这本著作中包括了使用这种解题技巧的几个重要的例子。

虽然笛卡儿的数学和现代的解析几何学之间有许多相似之处——这不足为奇，因为解析几何学许多现代的思想都来源于他的著作，但现代的解析几何学的观念和笛卡儿的思想之间也有重要的差别。

笛卡儿随意地使用坐标，我们没有什么证据表明他使用过今天以他的名字命名的坐标系。相反，他经常使用斜角坐标（当坐标轴不互相垂直时，坐标系就是斜的）。斜角坐标对于确定空间中的点很有效。但是，笛卡儿似乎没有注意到这些方面的问题，如它们会使平面上点之间的距离的计算变得困难。另外，他没有看到负

几何学里的代数符号

在建立现在被人们称为解析几何学的数学分支时,笛卡儿的目标之一是要摆脱古希腊数学所特有的令人费解的表示方法。为了理解这一点对笛卡儿和数学史为什么重要,我们只需要看一下希腊人表达他们自己的几何思想的方式。下面的定理出自阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》:

如果两个垂直对顶的曲面被一个不通过顶点的平面所截,则在每个曲面上所截出的截线就是我们所说的双曲线;这两条双曲线的直径是同一条直线;与平行于圆锥的底,且与直径的直线贴合成正方形的直线都相等。而截线顶点之间图形的横截部分是共同的。我们称这样的双曲线是对顶的。

(*Apollonius*. Conics. *Translated by Catesby Taliafero*. Great Books of the Western World. *Vol. 11*. *Chicago*: *Encyclopaedia Britannica*, *1952*.)

就算借助插图——它本身十分复杂——来理解这段语句也非常费力。而它的证明甚至更难,大约有两页长。

笛卡儿所做的工作正是用代数方程来代替复杂的图表和冗长难懂的语句。对于现代的读者来讲,因为这些符号看起来几乎是现代的,所以理解笛卡儿的数学符号并不困难。如果大家不记得我们的符号是从他的著作里得来的,这的确令人感到惊讶。就像我们所做的那样,笛卡儿用加号(+)表示加法,用

减号(-)表示减法,用字母表后面的字母表示变量,他的解析几何学的符号与我们现在的符号只有少量的不同。他用一个像一侧不完全封闭的数 8 的符号来代替我们的等号。和现在一样,他用指数来表示高于 2 的方幂;不过,他将我们现在的 x^2 表为 xx。但是,考虑到笛卡儿死于 350 多年以前,所以他的代数符号与现代的代数符号之间的相似之处还是令人感到惊讶的。

坐标的价值。最为重要的是,他没有使用过解析几何学中一个最重要的方法,而这种方法只有通过他的工作才变得可能,这就是绘出函数的图像。解析几何学使得用几何方法(绘出图像)来研究函数的数学性质成为可能,这是代数学的"原材料"。不过,笛卡儿在自己的著作中没有画过一个函数的图像。

由笛卡儿发现的,可能是几何学与代数学之间最重要的联系,是被数学家们经常称作解析几何学的基本原理的一种见解:用两个未知数来表示的每个不定方程* ——请大家回忆不定方程是有无穷多个解的方程——都表示一条曲线。"表示一条曲线"的含义是方程的每个解都由两个数组成,每个数都对应一个未知量。我们可以把这两个数想象成平面上点的坐标,所有这样的坐标构成的集合定义了轨迹,或者说点集。这个点的轨迹是二维空间中的一条曲线。

上述这种见解是代数思想和几何思想之间的一个重要桥梁。

---

* 现在"不定方程"通常是指未知数个数多于方程个数的代数方程(组)——译者注。

此外，它大大扩展了到那时为止可供数学家们使用的曲线的词汇。为了高度评价笛卡儿的这种见解，请大家要记住：希腊人仅仅知道大约十二种曲线。曲线种类贫乏的部分原因是人们没有一种找到曲线的简便方法。利用笛卡儿关于曲线和方程之间关系的这种见解，可以很容易地作出我们希望的任意多条曲线。当然，仅仅写出曲线的公式不足以洞悉曲线的性质，但笛卡儿的这种见解至少给出了一个简单的准则，它增加了可供数学家们研究的曲线的种类。

笛卡儿也发现了代数学和有关立体图形的几何学之间的另一个重要桥梁。他认识到这样一个事实：在一个含有三个变量的不定方程里，由此得到的表示它的解的点集构成三维空间中的一个曲面。这种见解使得数学家们能够创造出所有类型的三维图形。在笛卡儿之前，数学家们很难超越希腊人知道的那类简单形状。在他之后，就能很容易地作出我们所希望的任意多种形状。笛卡儿的工作又一次极大地增加了可供人们研究的对象集合。

笛卡儿的思想是数学史上的一个转折点，这与其说是他解决问题的结果，倒不如说是他采用的方法的结果。笛卡儿给数学家们指出了一种新颖的、十分富有成效的方法，利用这个方法可以重新来看待几何学和代数学之间的关系。他的见解推动了数学界一系列伟大的创造性活动的出现。然而，笛卡儿并不是其中的唯一一位。那些已经出现的思想，同笛卡儿的思想一样具有创新性。甚至当笛卡儿正在作出自己在数学上的一些最重要的发现时，法国律师、数学家费马(Pierre de Fermat)，在另一个地方也作出了那些同样的发现。

费　马

关于费马(Pierre de Fermat,1601—1665)的早期生活,我们能够确切知道的并不多。众所周知,他曾经获得奥尔良大学授予的法律学位,而且终生以律师为职业。但是,他不只对法律感兴趣。正是因为他在自己的律师职业之外取得的成就,所以人们现在还能记起他。

费马具有学习语言的天赋,精通好几门语言。他酷爱古典文学以及古代科学、数学的研究。尽管费马的这些活动给人们留下了深刻印象,但是人们似乎很少怀疑它们只不过是他的爱好而已。费马在一生当中只发表过一篇关于数学的文章。我们通过两个来源得知费马的发现:他去世后的遗著和个人的通信。他和同时代的许多最优秀的数学家都有过书信来往,其中的一些信件保存了下来,我们往往是从这些信件里了解到费马当时在做什么研究。

到了费马生活的那个时代,古希腊的著作已经广泛流传开来,数学家知道了许多遗失的著作——没有流传到现代的著作——的名字。只是因为在其他人的著作里提到了它们,这些遗失的著作才为人们所知。在费马所处的那个时代,人们在数学上的一个共同任务是尝试"复原"这些遗失的著作,这里"复原"的含义是:后来的作者试图用从古代其他的著作里所发现的参考资料来重新构建出这些著作。在读亚历山大的帕普斯的著作时,费马了解到有关阿波罗尼奥斯的一本遗失的著作——《平面轨迹》(*Plane Loci*,轨迹是由某个条件确定的点集,平面轨迹是平面上的点集,这里指的是曲线)。

在重新构建出可能是由阿波罗尼奥斯所撰写的著作时，费马注意到这样一个事实：通过使用坐标把代数学应用到几何学上，可以在相当大的程度上简化表示。这种见解是独立于笛卡儿作出的，它标志着解析几何学的第二个来源。通过这一观点，费马注意到：一个含有两个未知量的不定方程确定了平面上一条由点构成的轨迹。这也是解析几何学的基本原理，但费马的重点与笛卡儿的略有不同。不像笛卡儿，费马确实运用了某种方法——与现在的学生学习画图的方法有点儿类似——在自己的坐标系里画出了方程所表示的图。不久，他就注意到了特殊类型的方程与特殊的曲线之间的关系。

例如，费马注意到：由任意一个含有两个变量的一次方程——能够表为形如 $ax + by = c$ 的方程——所确定的点的轨迹是一条直线，二次方程可以与不同的圆锥曲线联系起来。不仅如此，他还认识到：方程的形式由所使用的坐标系决定。例如，在一个坐标系里，刻画一条特殊的双曲线的方程能够表为 $4x^2 - y^2 = 1$ 的形式，而在其他的坐标系里，同样的双曲线也能够用方程 $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 = 4$ 来刻画。同一条曲线可以用这样两个看起来不同的方程来表示的事实，导致了费马去研究变化的坐标如何改变最终产生的方程这一问题。他想知道两个看起来不同的方程什么时候表示同一条曲线。这一切都是独立于笛卡儿作出的。

和笛卡儿一样，费马发现：一个含有三个变量的不定方程表示三维空间中的一个曲面。虽然这种见解在费马去世许多年以后才得到充分的研究，但费马显然已经预见到接下来的伟大的一步，他好像在著作里暗示自己已经意识到：甚至对于更多的变量，类似的关系也成立。例如，含有四个变量的不定方程表示我们所谓的四

维曲面。但是,费马没有研究过这个基本的思想。

费马的另一个著名发现起源于他对古希腊数学家丢番图的著作的研究。和许多古希腊数学家一样,丢番图对确定毕达哥拉斯三元数组感兴趣。三元数组是具有如下性质的三个自然数所构成的集合:当每个数都平方时,其中一个数的平方等于另外两个数的平方之和。例如,因为 $3^2+4^2=5^2$,所以(3,4,5)就是一个著名的毕达哥拉斯三元数组。几千年前,人们就已经知道存在无限多的毕达哥拉斯三元数组了,但费马对这个问题的一般形式感兴趣。他从寻找具有如下性质的三元正整数组出发:当每个数都立方时,其中两个数的立方和等于第三个数的立方。用现在的符号表示,就是费马正在寻找 $a^3+b^3=c^3$ 这个方程的正整数解。他发现不存在这样的三元数组。另外的一项工作使他相信这样一个事实:对于任意一个大于 2 的正整数 n,不存在满足 $a^n+b^n=c^n$ 这个方程的三元正整数组。费马在丢番图的著作的页边写道:我已经发现了这个事实的一个美妙的证明,但页边的空白太小写不下。

这个很小的页边注记标志着人们寻找所谓的费马大定理的证明的开端。人们在其他地方没有找到费马的证明,许多数学家只得努力去证明这样一个对于费马似乎是显然的事实。尽管为费马大定理的证明设了大奖,但一直到 20 世纪晚期,人们才得到了它准确无误的证明,其完整证明最终运用了费马所不知的数学思想。

当费马注意到笛卡儿的《方法论》时,他开始与笛卡儿通信。但他们两个没有直接通过信,而是通过巴黎的梅森互通信件,这些信件的内容包含有关数学各个方面的讨论。虽然他们在数学的某个特殊方面偶尔会有分歧,但没有证据表明某一方成功地说服了对方改变观点。

毕达哥拉斯定理和笛卡儿坐标

毕达哥拉斯定理的内容是:直角三角形的斜边长的平方等于其余两边的平方和。这是一个有关三角形的事实,与人们选择的坐标系无关。事实上,在笛卡儿坐标系发现几千年之前,人们就已经发现了毕达哥拉斯定理。不过,笛卡儿坐标系完美地适合于使用毕达哥拉斯定理。

设想有一个平面,即我们已经在它上面画出一个笛卡儿坐标系的二维面。在这个平面上选取除坐标原点之外的任意一点,不妨称这个点的坐标为(a,b)。我们能够用原点、坐标轴和(a,b)这个点来构造一个直角三角形。画一条从原点到(a,b)的线,这条线是这个三角形的斜边。x轴上从原点到$x=a$的线段是这个三角形的第二条边,第三条边是平行于y轴终止于x轴和(a,b)这个点的线段。

接下来,毕达哥拉斯公式告诉我们:从原点到(a,b)这个点的距离是$\sqrt{a^2+b^2}$。在二维空间里,它也以距离公式著称。它能够推广到给出这个平面上任意两点之间的距离:(a_1,b_1)和(a_2,b_2)两个点之间的距离是$\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$。

上面的公式特别重要的原因是:在本质上,同样的公式在其他维的空间里也成立。虽然它只不过是毕达哥拉斯定理,但是我们也称它为距离公式,因为它给出了测量任意两点之间距离的一种简便方法。如果(a_1,b_1,c_1)和(a_2,b_2,c_2)是三维空间中的任意两个点,它们之间的距离由公式$\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2}$给出。在维数高于3的

空间里，同样的一般公式也成立。笛卡儿好像没有考虑这样的空间，但费马写了几句话，它们似乎暗示着费马知道在高维空间里能够建立一种几何学。后来，在几何学的历史上，推广毕达哥拉斯定理而得到的距离公式，在一种被称作微分几何学的新几何学的发展中变得十分重要。微分几何学也依赖笛卡儿和费马所开创的对几何对象的解析刻画。

费马撰写了大量著作。他和法国的数学家、哲学家帕斯卡一起奠定了概率论的基础。费马发展了后来对于微积分这个学科十分重要的一些概念，他还热衷于数论的研究，其中主要涉及整数集的性质的研究。他写信给其他数学家，试图说服他们去研究这些问题，但在那个时代，数论不是数学主流的研究对象，费马几乎没有机会说服其他人去研究它。

和笛卡儿的著作一样，费马的著作也开创了数学研究的一个新时代。直到现在，这位法国律师、语言学家和数学爱好者仍然是历史上比较有影响力的数学家之一。

第九章　微积分和解析几何学

笛卡儿和费马的解析几何学是研究几何学的一个重要工具，但它也给出了表达微积分思想的一种语言。微积分给出了一种崭新的、极其有价值的研究几何学的工具。第一个发表自己关于微积分的思想的人是德国的哲学家、外交家、科学家、发明家和数学家莱布尼茨(Gottfried Leibniz，1646—1716)。

无论夸大莱布尼茨有多博学多才和他工作有多努力都不过分。莱布尼茨出生在安逸的环境中，他的父亲是一名大学教授，在莱布尼茨六岁时去世。虽然莱布尼茨的母亲确保他受到了良好的教育，但莱布尼茨早期的大多数知识是从他家的图书馆中获得的。母亲是一位十分虔诚的宗教信徒，莱布尼茨从她那里对宗教产生了兴趣。宗教总是莱布尼茨的哲学思想的一个重要组成部分。

莱布尼茨曾经就读于莱比锡大学，他曾经学过哲学、拉丁语、希腊语、希伯来语、修辞学和一点儿数学。和同一历史时期的许多数学家一样，他在语言方面表现出了特殊的天赋。正是在莱比锡大学，莱布尼茨第一次接触到伽利略、笛卡儿和其他科学家的新科学。这些思想给他留下了深刻的印象，他开始考虑把新科学与古希腊的古典思想结合起来的问题。在获得学位后，莱布尼茨仍留在莱比锡学习法律。在20岁时，虽然他已经达到了博士毕业的要求，但莱比锡大学拒绝授予他博士学位，这显然是因为他的年龄。

就在莱比锡大学拒绝授予他学位时,莱布尼茨永远地离开了这所大学。不久,阿尔特多夫大学授予了莱布尼茨博士学位。

莱布尼茨对学术生活一点儿也不感兴趣,他终生从事大使和政府官员的工作。一些学者主张:莱布尼茨逃避学术生活,那是因为他不能忍受知识的分裂,而这是大学知识结构的特点。莱布尼茨总是对没有联系的思想进行统一有兴趣。虽然他为欧洲的学术界作出了重要贡献,但他从未专门从事过这项工作。在追求自己的学术目标的过程中,他很容易从一个知识分支转到另一个知识分支——他的目标是极其有抱负的。

莱布尼茨出生在欧洲一个遭受30年战争破坏的地区,这个可怕的战争冲突源于基督教的各派之间的宗教矛盾和欧洲列强之间的领土侵略。由于莱布尼茨到处可以明显见到30年战争带来的毁坏,于是他不知疲倦地终生致力于重新统一所有的基督教派系。

莱布尼茨的另一个目标是协调所有的知识分支。当时有许多科学团体,它们经常是被组织起来来研究和提出新科学的非正式组织。莱布尼茨致力于用这样的一种方式来尽力协调研究和组织由此产生的发现,从而阐明更广的、更多的关于宇宙的观点。虽然莱布尼茨得到人们的纪念是由于他对数学的贡献,但他在数学方面的发现只是一个大得多的体系中的一部分。

尽管莱布尼茨受到十分广泛的教育,但他一开始并不是一位精通许多方面的数学家。他在数学上的前几次努力给人们留下的印象并不是特别深刻。他利用自己的外交职位从事广泛的数学研究。特别要指出的是,他在基督教徒惠更斯(那个时代的一流科学家和数学家)的指导下研究过数学。就像他小时候自学一样,莱布尼茨主要通过自己的独立研究获取数学知识。

莱布尼茨具有发明好的数学符号的天赋。关于微积分，他思考了很久才发明了一种能够表达构成这门学科基础的思想和方法的符号。他对构成微积分的思想和方法的表述仍是现代学生所学习的内容，学习过初等微积分课程的人都熟悉 d/dx、$\int fdx$ 和其他几个符号，这些符号中的绝大部分都是莱布尼茨的创新。

为了正确评价莱布尼茨对微积分的表述的重要性，将他的数学遗产和微积分的另一位发现者牛顿的遗产相比较是有益的。大不列颠的数学家们谴责莱布尼茨剽窃了牛顿的工作，而生活在欧洲大陆的数学家争辩说莱布尼茨独立发明了微积分，两者之间有一场激烈的争论。（没有人争辩说牛顿不是第一个发现微积分的，但因为他没有发表自己的思想，所以直到莱布尼茨发表的论文促使牛顿让大家分享他的发现时，牛顿的这些思想才开始产生影响。）引起争论并且由此得以加强的民族感情，导致许多英国数学家采用牛顿的符号，而不是莱布尼茨的符号。结果在牛顿和莱布尼茨去世许多年以后，大不列颠在数学上取得的进步远远落后于欧洲大陆，那是由于莱布尼茨优越的符号在欧洲大陆上被广泛采用缘故。

莱布尼茨对数学的贡献远不止是用能够便于作进一步研究的方法表述了微积分，他使用微积分促进了自己对几何学的理解。微积分可以说是几何学研究中的一个极其重要的工具，它可以用来分析不使用它就不能被分析的曲线和曲面。

请大家回顾一下：解析几何学的基本原理是一个含有两个变量的方程确定了一条曲线。虽然这个原理使得表述任意多条曲线的方程变得十分容易，但是不能了解任意曲线的样子。所以，数学家们得到了一类新的、很广泛的曲线名称，并用它们来描述那些形

状不明显的曲线。他们怎样才能发现只用方程来刻画的曲线的性质？例如，为了画出一条曲线，我们必须回答许多问题：曲线在哪些区间上是上升的，或者是下降的？如果有可能的话，曲线在哪些位置上取得最大值或者最小值？借助微积分，这些类型的问题能够得到回答，而且往往很容易回答。

利用微积分，也能够解决许多比较明显的或者不太明显的几何问题。数学家们能够确定曲线在哪些点上最陡，而且他们能够计算曲线所围的面积，这些问题是数学上十分有趣的问题。此外，当曲线表示一个物理过程时，这些问题也具有科学上的重要性。微积分能够使莱布尼茨运用新的工具来研究新问题和老问题，其结果是数学和物理学在很长一段时间内的快速发展。

牛顿，新几何学和旧几何学

虽然新兴的解析几何学太有用而不能被忽视，但古希腊的几何学不可能立刻被新思想所取代。对于生活在这个时代的欧洲数学家来讲，欧几里得、阿波罗尼奥斯和阿基米德的著作中所表述的内容不仅仅是数学。希腊关于哲学和美学的思想仍旧十分重要，许多数学家仍在尽可能地使用直尺和圆规。英国的数学家、物理学家牛顿（Isaac Newton，1643—1727）的著作能够最好地证明这一点。

牛顿出生在林肯郡的沃尔索普这个村庄里。由于它占的面积太小，我们在现在的绝大多数地图上不可能找到它，它仍由沿着狭窄的、弯曲的街道建成的几所房子构成。沃尔索普离科斯特沃斯城大约有 1 英里（约 1.6 公里）远，后者足够大所以出现在地图上，

前者大约在伦敦偏北150公里的地方。

牛顿的童年生活很艰难。父亲在他出生之前就去世了。母亲改嫁,将牛顿送到他的外祖母家,而自己搬到另一个城市里和后来的丈夫一起生活。几年以后,牛顿的母亲再度守寡,牛顿和母亲重聚在一起。

当牛顿还小时,他就因为在机械方面的独创能力而变得出名,他自己动手制作了风筝、钟表和风车。牛顿曾经就读于格兰瑟姆附近的一所学校,并在那里学习了拉丁语(当时的许多学术著作都是用拉丁语写的),所学的数学只是比基本的算术明显地多一点儿。后来,牛顿在三一学院学习了欧几里得和笛卡儿的著作。但是,他不可能在课堂上学笛卡儿的著作,因为那个时代的大学仍在教授亚里士多德的古典哲学。伽利略、笛卡儿和其他科学家发起的科学和数学革命影响到了除大学之外的一切事物。牛顿开始独立地阅读当时所有主要的科学专著和数学论文,也阅读经典的希腊几何学。不久之后,他就掌握了这些思想,并开始发展自己关于光、运动、数学和炼金术的理论。

关于牛顿,有一个有趣的事实:牛顿总是对古老的、有点儿不可思议的炼金术的思想非常感兴趣。炼金术是中世纪的"科学",它想把铅变成金子。虽然许多善于思考的科学家已经抛弃了这套神秘的过程和信仰,但牛顿还是亲自动手把炼金术著作上的原文仔细地、一页一页地抄写到他个人的笔记本上。和同时代的许多科学家不同,牛顿总是向后和向前看得一样远。

当牛顿还是三一学院的一名学生时,就已经开始发展自己伟大的科学和数学思想了,但他并没有公开这项伟大的事业,所以毕业时也没有什么名气。显然,当时没有人了解牛顿在那里取得的

成就。在牛顿毕业的那一年(1665年),三一学院关闭了,并且被关闭了两年。当时,英格兰因淋巴腺鼠疫的又一次流行而陷于混乱。由于缺乏有效的医疗措施,所以人们别无选择,只有隔离被感染的地区,等待瘟疫平息下去。在这段时间内,牛顿完成了一生中的许多工作。当三一学院重新开放时,牛顿重返校园获得硕士学位,接着成了这所大学的一位教师。



牛顿。他发明了许多不同的坐标系来表达自己对几何学的深刻见解。(Library of Congress, Prints and Photographs Division)

现在,牛顿由于在光学、运动论、引力定律的发现和微积分的发明等方面的工作而被人们铭记于心,但他对几何学也感兴趣。在许多方面,牛顿的几何学方法都代表了那个时代的观点。

牛顿从未抛弃过使用直尺和圆规的几何学。延续古希腊的尺规作图没有必要,尺规作图最终不能多于一条直线和一个圆。在希腊人统治的时期,直尺和圆规足以作出许多新的、有趣的发现,但到牛顿生活的那个时代时,这些工具已经不能解决数学上的所有问题了。解析几何学——牛顿称之为现代人的几何学——不仅用起来更方便,而且能更好地适用于微积分。微积分是牛顿的许多科学分析所依据的一个数学分支。然而,牛顿坚持尽可能地使

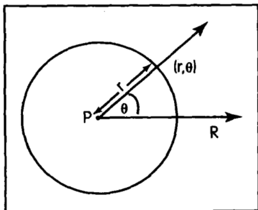
用直尺和圆规。甚至在他最著名的著作《自然哲学的数学原理》(*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*,现在更多是以《原理》而著称)中,牛顿往往尽可能地使用欧几里得的几何学而不是笛卡儿的几何学。在他的另一本著作《普遍算术》(*Arithmetica Universalis*)里,他甚至拒绝在几何学里使用方程。他认为:虽然方程对于新兴的解析几何学来说是基本的,但它在几何学里毫无地位。对牛顿来讲,几何学意味着综合几何学,即笛卡儿所摈弃的图表的几何学。

无论牛顿认为几何学里正确的内容是什么,他总在必要的时候使用解析方法。事实上,他在几何学的几个方面都十分具有创造力。牛顿建立了几种新的坐标系就是他对解析几何学感兴趣的一个有趣例子。他在自己所著的《流数法与无穷级数法》(*De Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum*,关于级数和流数的方法——更多是以流数法著称——是对微积分的一个刻画)一书中刻画了八种这样的坐标系。其中一种坐标系——极坐标系,现在仍被人们广泛使用着。

在极坐标系下,每一点都由一个长度和一个角度来确定。不妨设坐标(r,θ)表示这对长度和角度,这里字母r表示长度,希腊字母θ(theta)表示角度。为了理解牛顿的思想,请大家设想有一个点P和一条射线R,我们可以把这条射线想象成十分长的箭,射线R在P点处有一条"尾巴"。我们的测量涉及P和R,通常用字母r来表示的长度确定了所有的距离P为r的点,但所有的距离P为r的点构成的集合是一个中心在P、半径为r的圆。因此,长度(恒为正)让我们确定的不是一个点,而是一个圆。与此相对应的是,角度可以让我们确定另外一条射线,这是一条端点在P点,

并和 R 形成角 θ 的射线。我们所感兴趣的点位于这条射线和上面那个圆相交的地方。对于牛顿来讲，我们称为极坐标的坐标系在螺旋线的研究中十分有用，尽管现在我们在更广泛的应用范围里使用它们(参见相关插图)。

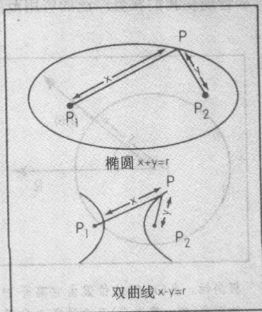
牛顿对笛卡儿坐标的理解比他的前辈要宽泛得多。他自由地使用负坐标，而笛卡儿仅仅使用正的坐标，使用负坐标所导致的一个结果是牛顿能够思考函数的整个图形。当自变量是负的时，他能够观察到函数的形状，因此在这种意义下，牛顿的图形比他的前辈的要“大”。与前辈们相比，这种对笛卡儿坐标的十分全面的理解使他能够描绘出更完整的有关函数性质的图形。因为牛顿的函数经常表示物理对象或物理现象，所以牛顿能够更清楚地洞察这些函数所表示的现象。



极坐标。点 (r,θ) 的位置由它离开 P 的距离(用 r 来表示)及由射线 R 和通过点 P 和点 (r,θ) 的线所形成的角度(这里用希腊字母 θ 来表示)决定。

牛顿的许多坐标系表明的不仅仅是专门的技巧。在某种程度上，它们是牛顿观察宇宙的方式的反映，他认为空间具有绝对性。在很大程度上，牛顿认为宇宙就像我们把舞台看作是戏剧表演的地方一样。严格地讲，舞台不是戏剧的一部分，而是戏剧表演的地方。类似地，对牛顿来讲，空间是自然界在其中进化的一个巨大的、平淡无奇的宽广区域，它是所有事物的无声的、不能改变的背景。空间是宇宙的所在地，但严格来说它又不是宇宙的一部分。

双极坐标系



椭圆 $x+y=r$ 双曲线 $x-y=r$

椭圆、双曲线以及使用双极坐标表示它们的方程

牛顿发明的另一种坐标系——双极坐标系——给出了如下的结论:坐标系的选择是如何简化平面几何学的研究的。现在,人们不经常使用双极坐标了,但它们能够使得在代数学上刻画圆锥曲线变得极其容易。为了画出一个双极坐标系,需要选取两个不同的点。为了理解如何使用这个坐标系,请大家考虑两种圆锥曲线——椭圆和双曲线。

椭圆由两个点(称为焦点)和一个长度来确定。已知两个点(不妨称为 P_1 和 P_2)和一个长度,椭圆是由所有的满足下面

就像舞台和戏剧一样,空间对牛顿来说是展现宇宙的地方。在牛顿看来,事情是在空间里发生的,它们不会对空间产生作用。人们经常把这种现实观念称为“绝对空间”。

上述理解产生了这样的一个后果:如果两个观察者沿着各自的直线路径以固定的速度运动,那么当他们去测量任意两个对象

条件的点构成的集合：它到 P_1 和 P_2 的距离之和等于已知长度。为了理解这一点，不妨设 r 表示已知长度，P 表示椭圆上的一点，x 和 y 分别表示 P 到 P_1 和 P_2 的距离，x 和 y 这两个距离满足 $x+y=r$ 这个方程。事实上，一个点在椭圆上当且仅当那个点到 P_1 和 P_2 的距离满足这个方程。而且不可能有比这个方程更简单的形式了。与此相对应的是，$ax^2+bx+cy^2+dx=e$ 是用笛卡儿坐标表示的椭圆的一般方程。

类似地，双曲线也由两个点和一个距离来确定，它可以定义为所有满足这样条件的点的集合：它到 P_1 和 P_2 这两个点的距离之差是一个常数 r。因此，用双极坐标所表示的双曲线方程是 $x-y=r$（参见插图）。

在笛卡儿坐标系里，$x+y=r$ 和 $x-y=r$（这里 x 和 y 是变量，r 是常数）这两个方程都表示直线。虽然方程的含义主要取决于它们出现的坐标系，但坐标系只是表达思想的途径。对于已知的目的来讲，最好的坐标系是尽可能简单明了地表达所需信息的坐标系，牛顿是理解并应用这个原理的第一批数学家中的一员。现在，许多坐标系仍在被人们普遍使用着。

之间的距离时，若两个人都没有错误，那将得到同一测量结果。在这个空间模型里，由于他们只是在测量空间中两个固定点之间的距离，所以必定会得出同一测量结果，反映这种“同一性”的坐标系是三维的笛卡儿坐标系。虽然就像大家在后面即将看到的那样，这个宇宙的模型被证明是一个十分有用的几何模型，但它并不是可供我们选择的唯一有用的模型。

牛顿对时间持类似的观点。他认为时间是绝对的，这与他认

为空间是绝对的一样。据牛顿所述,时间在宇宙之外,就像秒表在比赛之外一样。比赛——例如竞走——发生在秒表计时期间,但比赛并不影响秒表,秒表也不影响比赛。在这种意义下,秒表不是比赛的一部分。类似地,虽然宇宙是随着时间来展现自身的,但在宇宙中发生的这个过程并不影响时间的流逝。在牛顿看来,任意两个配备准确的表的观察者测量到的时间是一样的,如果他们的表显示消逝了相等的时间。

通过使用四维的笛卡儿坐标系,身为数学家、物理学家和工程师的牛顿表述了这些关于时间和空间的观点。其中有三个坐标用于确定点在空间中的位置,第四个坐标用来确定点所处的时间。这个四维坐标系下的位置经常用类似这样的坐标来表示:(x_1, x_2, x_3, t),这里 t 代表点所处的时间,其他坐标用于确定点在空间中的位置。四维是必要的,因为为了具体说明任意一类事件,我们需要具体指出它在空间中的位置以及发生的时间。牛顿认为:由于距离和时间对于各个地方的人来说都是一样的,所以同一个坐标系能够应用于整个空间。人们有时把宇宙的这个几何学模型称为牛顿参照系。

几个世纪以来,牛顿关于宇宙的几何学的观念仍然居于西方科学的核心地位,但它们有自己的局限性。直到 20 世纪,牛顿的几何学观念不是(可以这么说)普遍有效的这一事实才得到了人们的认可。但是,由于它们对于许多实际应用来说已经足够准确,所以人们仍在科学和工程学的许多分支里使用牛顿参照系。牛顿对空间和时间的几何理解仍是现代科学中被人们最广泛使用的和最有用的观点之一。

欧拉和立体几何学

欧拉(Leonhard Euler,1707—1783)是一位对解析几何学的发展作出了重要贡献的瑞士数学家,他热爱数学。当欧拉的一只眼睛失明时,据说人们评论道:这将意味着他会更少离开自己的工作。这种说法具有预言性。虽然数学是一个高度形象化的领域——方程、图表、曲面和曲线看起来都比听起来好许多,但是欧拉有着非凡的数学想象力。就像贝多芬可以不用耳朵来创作音乐一样,欧拉不用眼睛就能进行数学研究,这一点不比贝多芬逊色。

欧拉对太阳、月亮和地球之间的万有引力感兴趣。它们之间的相互作用十分复杂,这个三体系统的任一现实的数学模型都含有难解的复杂方程,一部分原因是这个系统的几何学在不断地发生变化。虽然欧拉中年时在这个问题上取得了一些成功,但他对这种解法并不是完全满意。许多年以后,他重新来研究这个问题。但是,在这段时间里,他已经完全失明,不得不在脑子里想象这些方程和进行相应的计算。他的第二个理论只不过是在第一个理论的基础之上的改进。在解析几何学这个领域里,欧拉发展了许多代数方法,建立了许多概念,这有助于他想象和分析三维空间中的曲面。现在,人们把对三维空间中对象的几何性质的研究称作立体解析几何学。

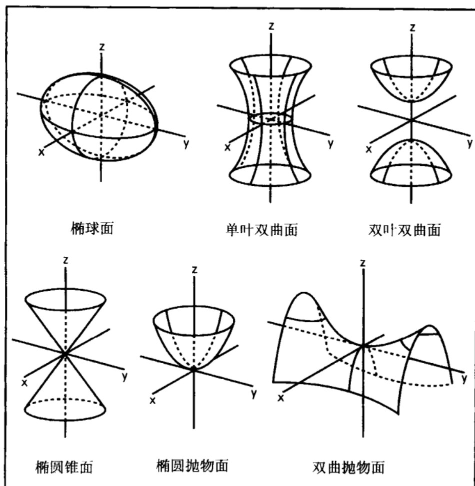
欧拉不是研究立体解析几何学的第一个人,甚至笛卡儿也已经了解了三维空间中一些刻画曲面的方式。就像在这本书中前面所讨论的那样,笛卡儿注意到这样一个事实:含有三个变量的单个不定方程在如下的意义下定义了一个曲面,即方程的每个解都是

一个有序的三元数组，因此这个解确定了空间中的一个点。所有的解的集合是一个曲面，它的性质取决于这个方程的具体性质。但是，为了利用这些观点，我们必须进一步地建立特殊曲面和特殊方程之间的具体对应。某类曲面中的每一个曲面都是一类特殊方程的解集。我们可以确信，虽然笛卡儿在代数学（方程）和几何学（相应的点的轨迹）之间建立了一个重要的联系，但他缺少用于研究由这种方法所确定曲面的性质的数学工具。这个任务留给了欧拉，他开始分析在方程与曲面之间存在的许多关系。



欧拉，历史上最多产的数学家之一，他极大地拓展了几何学领域。（Library of Congress, Prints and Photographs Division）

为了借助代数方程来研究几何学，欧拉不得不确定：当坐标系本身发生变化时，在坐标系里刻画一个曲面的方程是如何改变的。改变坐标系就改变了相关方程的形式，但只是用十分具体的方式。欧拉碰到的前几个问题中的其中一个问题如下：已知两个看起来不同的方程，每个方程都刻画了三维空间中的一个曲面，如何才能确定它们实际上刻画的是不同坐标系下的同一个曲面？欧拉不是第一位提出这个问题的数学家。费马在更早的时候曾研究过这个问题，但因为从费马那个时代以后数学已有了很大的发展，所以欧拉在取得进展方面处于更有利的地位。



六类二次曲面。

在研究的过程中，欧拉特别感兴趣的是涉及平移和旋转时坐标系的改变，前者是指坐标原点从一个位置移动到另一个位置的坐标改变，而后者是指使坐标系围绕某个预先指定的轴旋转的运动。这些都是所谓的欧几里得变换：在欧几里得几何学里，如果一个图形经过一系列的平移和旋转之后能够与另一个图形重合，就称这两个图形是合同的。因此，欧拉努力寻求欧几里得应用于三

维空间中的合同思想的一个解析表达式。下面这一点是重要的：已知两个方程，如何能够确定是否存在一个由坐标轴的平移和旋转所构成的坐标变换，使得由其中一个方程定义的曲面与另一个方程定义的曲面重合？这个问题的答案往往不是显而易见的，然而，如果不能够确定两个对象什么时候相同（或不同！），那么就没有什么可研究的了。欧拉的主要问题之一是建立一个能够使他回答这类问题的解析准则。

欧拉不仅寻求合同的一个广义的解析表达式，还推广了圆锥曲线的思想，他所推广的圆锥曲线称作二次曲面。一共存在六类主要的二次曲面：椭圆抛物面、双曲抛物面、椭圆锥面、椭球面、单叶双曲面和双叶双曲面。每一类二次曲面都由一个含有三个变量的二次方程来确定。通过变换坐标系直到每个方程都化成标准形式以后，我们就可以以这种最好的方式来比较由这些方程所确定的曲面。接下来再画出这些曲面就相对容易了，图能够用来比较相似之处和不同之处。二次曲面只是欧拉研究的一部分。他也研究过其他曲面，并试图对这些曲面进行分类，这些曲面都取决于定义它们的方程的性质。

在某种意义上，欧拉在立体解析几何学方面的工作是开天辟地的。他对三维对象的解析描述比任何人都更为深入。另一方面，他好像从古希腊人所做的工作中汲取到了灵感。我们在这里所叙述的内容中没有什么演算。除了表述它们的语言之外，欧拉关于合同和圆锥曲线的思想几乎是古典的，这是使得他的思想在数学上有吸引力的一部分原因。它们囊括了希腊几何学，但只是作为一种特殊情形。虽然欧拉关于立体几何学的思想深深植根于遥远的过去，但这些思想也把古代的结果扩展为一些既新又有用

的结果。

欧拉在解析几何学领域取得的许多成就来源于他的数学函数的概念。虽然笛卡儿、费马、牛顿和莱布尼茨也都努力探究数学函数的思想，但欧拉第一个系统化地使用了这个概念。因为欧拉经常用函数来表示对象——它们经常表示几何对象，所以他能够把自己做了许多工作而发展起来的所有思想和方法应用到函数上。现在的所有学生在他们的早期教育中都会接触到函数这个概念，对函数的强调几乎到了排斥其他任何一种数学方法的地步，这意味着绝大部分人将函数与数学等同起来。但是，没有函数也能研究数学。例如，阿波罗尼奥斯在对椭圆、双曲线和抛物线的论述里就没有函数的概念。函数不是必需的，但它们极其有用。由强调对曲线和曲面进行综合刻画转变为从代数方面来强调函数，欧拉从而能够转向更为抽象的，并且最终是更为有用的那类数学的研究。

欧拉对曲面的参数化表示是他使用函数的漂亮例子之一。对曲面进行系统地参数化是欧拉的另一个创新。他发现有时在一个问题里先引入一个或多个辅助变量，然后用这些辅助变量或参数来表示曲线和曲面很方便，甚至还能提供许多信息。

为了表达欧拉的思想，我们从二维而不是三维入手，考虑对一条曲线进行参数化的问题。为了便于说明，不妨假定有一条细长的、直的、能够变形的线，并且假定在一张纸上已经画出了一条曲线，这条曲线满足不自交这一条件。接下来我们可以让线弯曲，直到它与纸上画出的曲线重合时为止。在此过程中，我们把线变成了一个新形状——数学家将这称为把线“映射”到曲线上，但我们没有截断或者以另外的方式损坏线。通过采用这种方法使线变

形，我们就建立起了一维线上的点与曲线上的点之间的一个一一对应或“配对”，这种对应在二维空间里是存在的。

我们可以认为线上的每个点与单独的一个数（即给定点到这条线的一个固定端点的距离）等同，设字母 t 代表沿这条线的距离。但是，平面上的每个点需要两个数——一个有序数对——来表示它的位置，设 (x,y) 代表曲线上一点。通过把线置于曲线之上，从而建立了 t（线上距离起点为 t 个单位的点）和这条曲线上的点 (x,y) 之间的一个一一对应，这使得我们能够用由这个对应所确定的函数来刻画这条曲线——称作函数 $x(t)$ 和 $y(t)$。人们称 $x(t)$ 和 $y(t)$ 这两个函数为这条曲线的参数表示。

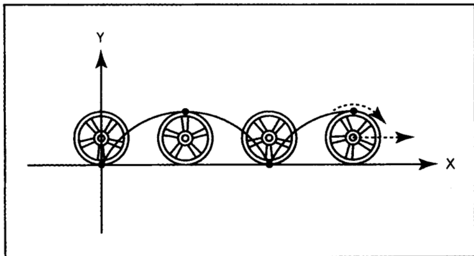
上面是欧拉对曲线参数化时我们对他所做工作的一个物理模拟。细长的、直的、能够变形的线的类比物是实数直线或它的一部分。欧拉使用数学函数来刻画被弯曲的线或线段的形状，而不是在物理上使线弯曲。数学家们通过这种方式引入一个参数，可以很容易地刻画出许多种曲线。此外，参数经常被选来表示某个物理量，例如时间——就像在我们的例子里——或距离。当然，这恰好是沿着某一路径行驶时，我们用到那儿的时间或距离来刻画一个遥远的位置（相对我们自身的位置）时所做的工作。在那种意义下，参数化不仅仅是为了方便，它们也是刻画曲线的一种比较自然的方式。

摆线是欧拉应用上述见解的那类曲线中的一个例子，它有一个易于人们想象的机械描述。当车轮沿光滑的地面滚动而没有滑动时，车轮边缘上的质点描绘出的轨迹就是摆线。如果我们想象车轮沿 x 轴的正方向滚动，那么就能够使用含有正弦和余弦的三角函数来表示质点的轨迹：

$$x = rt - r\sin t$$

$$y = r - r\cos t$$

这里 t 是参数，r 代表车轮的半径。这两个方程给出了 x 和 y 坐标如何表示为单变量 t 的函数。



摆线的机械表示。

曲面的参数化表示是三维空间中的类似问题。这里的物理模拟是想象一个平展的、细薄的、能够变形的橡胶薄片，我们设想在这个平展的薄片上画了一个笛卡儿坐标系。现在，如果我们设想一个三维的物体，通过在物体上面拉伸平展的橡胶薄片，直到和物体完全贴合，我们就能够“捕捉”或模拟这个物体的形状了。在这种情形里，我们用这样一种方式把一个平展的二维表面“映射”到一个三维物体上，从而又建立了一个一一对应。这次是平面上——这里用平展的橡胶薄片来表示——的点和物体表面之间的对应。因为平展的薄片是一个二维对象，所以只需要两个数就可以确定薄片上的任意一点：x 坐标和 y 坐标。另一方面，三维空间

中的每个点需要三个坐标来确定它的位置:(长,宽,高)。因此,如果我们设有序三元组(u,x,w)代表三维空间中的点,设(x,y)代表二维空间里的点,则曲面的参数方程具有如下的形式

$$u = u(x,y)$$
$$v = v(x,y)$$
$$w = w(x,y)$$

这里我们把三维的曲面坐标 u、v、w 表为二维“薄片”的变量 x 和 y 的函数。

对于任意的有序对(x,y),在我们选取的三维坐标系里通过测量(x,y)的位置,就能够找到函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$、$w(x,y)$的近似值。在我们的坐标系里测量时,点的 u 坐标(被称作 $u(x,y)$)只是(x,y)的“长度”测量,不妨用 u,(x,y)来表示这个度量。v 坐标是(x,y)在三维坐标系里的“宽度”测量——这个度量是$v(x,y)$。w 坐标是(x,y)在坐标系里的高度测量,我们用$w(x,y)$来表示这个度量。

对半球面的刻画是曲面的参数刻画的一个简单例子,它可以用下面的方程来刻画

$$u(x,y) = x$$
$$v(x,y) = y$$
$$w(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

这里参数 x 和 y 被限制在中心为坐标原点、半径为 1 的圆盘上。

在确定了几类对象的存在性及其大致形状以后,欧拉接下来开始分析其他更为细微的性质。在此,他的微积分知识开始扮演重要的角色。对一条重要路线的探求与三维空间中沿着曲面运动的问题有关:已知一个曲面上的两个点,如果要求不离开这个曲

蒙 日

我们已经在射影几何学的那一部分里讲述过蒙日的一些贡献和他的一个简短传记。由于他在解析几何学的发明方面也有贡献,所以在这一部分里也值得谈及他。蒙日的兴趣十分广泛,除了进行数学研究之外,他还是一名具有献身精神的教师、科学家和拿破仑的追随者。他为拿破仑所做的工作、对所有科学问题的兴趣以及同时在几所大学里任教的事实,本来都会使他对数学的贡献黯然失色。然而,蒙日是一个"天生的"几何学家,以至于他在担任其他职务和追求其他兴趣的同时,也能够对几何学的几个方面作出贡献。

蒙日认为几何学是数学的语言,这无疑是当时少数人的观点。分析学有理由吸引了绝大部分人的注意。欧拉和其他数学家使用微积分及其相关概念,取得了极其重大的发现。其进步是迅速的,影响是深远的。然而,蒙日对这些发展并不太满意,他从几何学的角度重新研究了分析中的这些问题。由于他重新表述了分析中的这些问题,以至于问题的几何组成部分处于突出地位。蒙日是从几何学的角度来考虑问题的。

为了熟悉蒙日尤其喜爱的那类问题,我们简要回顾一下由他第一个解决的一类特殊问题。设想在三维空间里有两个平面。如果这两个平面不平行,那么它们必定交于一条线。(在笛卡儿坐标系里,这两个平面可以用方程 $ax+by+cz=d$ 和 $a'x+b'y+c'z=d'$ 来刻画,这里 x、y 和 z 是变量,而 a、b、c、d、a'、b'、c' 和 d' 这些数被称作系数,并且假定它们是已知的。)蒙

日使用这些平面的解析表达式,从而得到了一条线的方程。然后,他想象与这条线垂直的另一个平面,并用刻画前两个平面的系数来计算这个平面的方程。如果阿波罗尼奥斯知道解析几何学的话,他肯定也对这个问题感兴趣。虽然这个问题带有希腊几何学的气息,但它是解析地表达的。和欧拉一样,蒙日也研究过二次曲面,它们是圆锥曲线在三维空间中的推广。蒙日的工作是希腊文化的美学以及笛卡儿、牛顿和欧拉的工作中所产生的数学这两者的完美结合。

面,那么这两个点之间的最短路径是哪一条线?找到并计算出这条最短路径的困难在于古老的欧几里得准则——两点之间的最短距离是直线——已不再适用了,曲面上可能没有连接这两个点的任何"直线"。因此,确定两个已知点之间的最短距离的问题可能相当复杂。人们把连接曲面上两个已知点之间的最短路径称作测地线。

欧拉借助这类分析,开创了一个崭新的数学世界。他能够用新兴的数学来刻画三维空间中新的类型的对象,并研究它们的几何性质。这是一个巨大的进步,人们立刻公认它是一个高度创新的方法,其他数学家迅速沿用了这种分析。

最后,这些数学家把笛卡儿、费马的思想以及见解同这种新的分析结合起来,提出了一种几何学的方法,这种方法直到现在仍被人们研究和广泛使用。随着时间改变的是几何学的观念。当欧拉和其他数学家寻求刻画不同曲面的方法时,同时代的人认为他们正在做的工作是高度抽象的。现在,欧拉和其他数学家曾经研究过的同类问题往往与应用数学和工程学中的研究有关。他们先前

的发现正在以发现者所不能预测到的方式被人们使用着，这是如何被一代的研究者视为纯数学而被后来的研究者视为应用数学的一个绝妙例子。

第十章　微分几何学

在发展表示和分析曲面及曲线的必要的概念工具方面，欧拉作出了巨大贡献。但是，欧拉强调从整体上去刻画曲面。也就是说，他追求的是刻画一个整体对象的表面，而不是仔细去分析曲面在一点附近的性质。分析一个曲面在一个点的邻域内的一小部分曲面被称作局部分析。乍一看，虽然局部分析似乎不如整体分析有趣，但时间证明情况恰恰相反。第一个看到局部分析的价值的人是德国的数学家和物理学家高斯（Carl Friedrich Gauss，1777—1855），他被公认为微分几何学的创始人。微分几何学是几何学的一个分支，它使用分析学（微积分隶属的那个分支）的工具来研究曲面的局部性质。（高斯对非欧几何学的贡献在这本书的前面已经谈过了。）

为了理解高斯在微分几何学中的工作，了解如下的事实是有用的：高斯也对测地学这个十分实用的领域感兴趣，该领域涉及怎样准确地确定地球的大小和形状，以及地球上点的精确位置。实际上，高斯为政府领导进行了极大规模的测量活动。为曲面绘制最精确的平面地图，是微分几何学中的某些思想的最好体现。

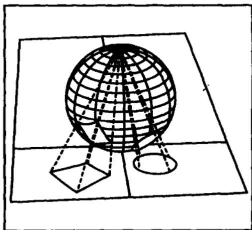
我们中有许多人想当然地认为地图一定是准确的，我们使用的地图似乎给出了各地准确的位置、大小和地理特征的形状。然而，所有这些地图都包含着不准确性，并且被绘制的面积越大，地

图的不准确性就越大。产生其中一些扭曲的原因是显而易见的。例如,一张旧金山的平直的街道图不能反映出这个城市典型的陡峭山脉,这归于短距离的扭曲。此外,地图上城市街道相交的角度或许与实际街道不相符,这也是在平面图上表示一个弯曲曲面的结果。实际上,当绘制一个国家、一个州,甚至一个大城市的任何一张地图时,我们肯定会扭曲距离,甚至当地形根本不是多丘陵地带时。这是因为所选区域的大小再适中,它的地理特征也不是平展的。地球本身是圆的,它的主要地理区域的几何性质必须反映出它们所在的弯曲曲面。

从数学上来讲,使用所谓的切平面是绘制地图的其中的一种方法。请大家考虑一个球面和一个平面。设想把平面这样摆放,使它与球面恰好在一点接触,我们称这个平面与球面相切于接触点。球面上的每一点只存在一个切平面。或者说,在已知点处与一个球面相切的任意两个平面必定重合。切平面唯一性的一个推论是:切平面是球面在切点处的一个最佳的平面逼近。

在切点附近绘制一幅好的地图的方法涉及将重要的区域投影到切平面上。这个过程称为"球极平面射影"。为了理解这个过程是如何进行的,请大家设想把一个球面置于一个平面上,因此这个球面位于平面内一个孤立的点上,我们称这点为南极。现在,请想象一条通过南极和球心的线。延长这条线直至它与球面的顶部相交,我们称这个交点为北极。从理论上来讲,把画在球面上的纬线和经线转移到平面上是一件简单的事情:延长一条始自北极且经过球面上一点的线,直至它与切平面相交。这个过程建立了球面与平面上点之间的一一对应。除了北极之外,球面上的每一个点都被映到平面上的一点。南极附近的形状也被转移到切平面上,

没有太大扭曲。但是，当靠近北极的形状转移到与南极相切的平面上时，就会被严重扭曲。北极附近的纬线实际上是球面上以北极为圆心的一个小圆，它被映为切平面上的一个大圆（这个大圆的圆心是与南极重合的那个点）。这个例子解释了这样的问题：当用这种方法绘制地图时，南极附近的小块区域为什么没有多少扭曲；当被映射的曲面开始远离切平面时，地图的准确性为什么开始降低。（参见插图。）



球面上的图形到平面的球极平面射影。

这个过程同样可以倒过来。我们可以想象平面上有一个图形，将球面的南极置于这个平面最重要的一点上，然后重复前面段落里描述的作图过程。这使得我们能够在球面上画出这个平面图形，并且这个图形在南极附近没有多少扭曲。我们甚至能够把这个平面坐标系和曲线描绘到球面上。我们使用这种方法，能够把一个坐标系画到球面上，并且这个坐标系在南极附近不会有严重的扭曲。所有这一切的中心主题是：当曲面远离切平面弯曲时，这个切平面就很难近似地刻画这个曲面了。

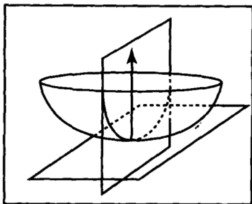
高斯认识到这样的事实：为了在曲面的研究中取得更大进展，必须理解有关曲面在一个点的邻域内曲率的研究。曲率的研究是高斯对微分几何学的重要贡献之一。高斯发现了一种测量曲面曲率的方法，这种方法能够让我们准确地说出一个曲面的曲率。这

好像比起初看起来的要困难，那是因为我们经常将一个曲面的曲率和一条曲线的曲率搞混。

虽然计算一条平面曲线的曲率可能需要大量的数学知识，但比较两条平面曲线的曲率的过程要比想象的相对简单。我们能够通过简单的叠加来比较两条平面曲线在两个点处的曲率，把其中的一点置于另一点之上，然后让其中的一条曲线相对于另一条“倾斜”，直至通过观察能够清楚地看出哪一条曲线在考察的点的区域里弯曲程度更大，这个过程至少在直觉上相当清楚。而弯曲曲面所面临的另一个问题是：它们在同一点可以沿不同方向弯曲。甚至对于非常简单的曲面，这个命题也成立。例如，当从后向前去截鞍形曲面时，得到的曲线是“向上”弯曲的；当从一侧向另一侧截它时，曲线又是“向下”弯曲的。因此，在鞍形曲面的对称轴上的任意一点处的曲率并不是完全显而易见的。

对于在曲面上一点处三维的曲率问题，高斯将其简化为一系列涉及曲线曲率的二维问题。为了领会高斯的思想，首先，我们想象在光滑曲面上存在一点，不妨称它为 P 点。现在，请大家想象在 P 点的切平面（我们回顾一下，切平面是唯一一个能够在切点处最好地反映曲面的平面）。接下来，想象一条线，不妨称为 l，它从 P 点向曲面外延伸，并且与切平面垂直。现在，想象一个包含线 l 的平面。这个平面与切平面垂直，并且向四面延伸，恰好穿过那个曲面。线 l 是这个平面能够围绕其旋转的一类转轴。

无论我们让第二个平面围绕线 l 如何旋转，这个平面与曲面的交点都形成一条过 P 点的曲线，曲线的形状通常依赖于平面的定向。现在，请大家想象这个平面围绕线 l 旋转，这个平面在每个新位置都和曲面相交形成一条新的曲线。我们运用这种方法，可



一个平面与一个曲面的交是一条曲线。当这个平面围绕图中的箭头(向量)旋转时,由这个曲面和这个平面所确定的曲线也会发生改变。

以构造出一个包含点 P 的曲线集合。对于许多有实际意义的曲面来讲,存在这样的两条曲线,其中的一条曲率最大,另一条曲率最小。高斯所发现的一个显著事实是:在 P 点有最大曲率的曲线的方向总与在这点有最小曲率的曲线的方向垂直。最后,高斯计算了在 P 点的最大曲率和最小曲率,并且使用它们定义了曲面在一点处的总曲率,现在以高斯曲率著称。

因为在微分几何学里使用的数学知识有点儿复杂,所以我们对高斯思想的描述所采用的是文字形式——用没有方程的方式表述。不过,高斯是用分析的语言表达他的思想的。这一点十分重要,因为在微分几何学里曲面是用一个或多个方程来刻画的,而希腊人用文字叙述的刻画方式已不再满足人们的需要了。随着方程的引入,曲面的形状可能一点儿也不明显了。但是,我们可以用高斯的方法来研究它的曲率,这是高斯所开创的分析方法的一部分价值所在。

微分几何学的发现能够使数学家从不同的角度来解决几何学中的问题,分析学这个工具使得研究日益复杂的曲面成为可能。数学家开始考虑如何研究弯曲曲面上的数学问题。例如,怎样在弯曲曲面上建立坐标系?它们有什么性质?弯曲曲面上两个不同的坐标系之间是怎样联系的?

对坐标系和曲面曲率大小的研究仅仅是个开始。数学家们想研究弯曲曲面上的数学问题,他们想研究弯曲曲面上的曲线和几何图形。例如,曲线可能包围(弯曲)曲面的某些区域。怎样计算曲线所包围的曲面的面积呢?和欧拉一样,高斯对测地线的问题感兴趣,承认它是弯曲曲面上两点之间的最短路径。在普通的二维或三维空间里,两点之间的直线距离最短。因此,在某种意义下,弯曲曲面上的测地线与直线类似。这些问题并不是特别简单,但它们也仅仅是开始。

到现在为止,我们描述了曲面的几何学,好像自己就位于所研究曲面的外部。相反,假设我们位于一个非常大的弯曲曲面上,不能够逃离这个曲面,也不能够看见这个曲面的外部。实际上,我们会是二维的生物。在这种情形下,我们所能够了解的唯一的几何学将是自己所生活的曲面上的几何学,我们能够做的唯一观测来自我们在曲面上所处位置附近的情况。这种情况导致了许多新问题的产生:在自己所在的曲面上做观测,我们能够了解这个曲面的什么性质呢?例如,我们是否能够认识到自己所生活的曲面是弯曲的?我们能够计算出它的曲率吗?这些都是新问题,它们激发了许多思想的产生。对这些问题给予解答的第一批数学家之中,有德国的数学家黎曼。

黎　曼

黎曼(Georg Friedrich Bernhard Riemann,1826—1866)是19世纪最富有想象力的数学家之一,他更多时候是以Bernhard Riemann而出名。他的一生比较短暂,40岁就死于肺结核。黎曼生前没有发

表太多论文,而且一生中绝大部分的时间里都过着十分艰难的生活。但是,他对数学的独特见解是如此的引人注目,以至于它们永久地改变了怎样作数学研究的观点。

黎曼出生在一个中产阶级的家庭中。他早年生活的所有记载显示,他的家庭十分和睦,甚至在搬出去住以后,他仍与父母保持着紧密的联系。黎曼的父亲是路德教会的牧师,黎曼在家从他那里接受了几年的入门教育。中学毕业后,黎曼的能力和水平已经跃居他的老师之上,他好像对微积分和数论尤为感兴趣。



黎曼。他的几何学思想为20世纪物理学的发展铺平了道路。(Library of Congress, Prints and Photographs Division)

父亲希望儿子学习神学。进入大学后,黎曼最初就是这样做的。但是不久,他写信给父亲要求改变学习计划,从而使自己能够集中精力学习数学。父亲欣然应允,从此黎曼开始了数学方面的研究。他曾经就读于柏林大学和哥廷根大学。对于19世纪的数学来讲,这两所大学就像亚历山大对于古代的数学一样重要。他最终从哥廷根大学获得博士学位,高斯是其论文的指导老师。在博士毕业后的几年时间里,虽然黎曼仍然过着贫穷的生活,但他在这段时间里写出了几篇重要的数学论文。

黎曼的主要成就涉及如下几个领域:物理学、几何学、数论、复

变函数论和微分方程。与许多前辈的著作不同,黎曼经常用文字叙述的方式来表达自己的思想。虽然许多同时代的人紧紧抓住新兴数学所要求的严格性不放,但他一般避免计算和大量地使用代数符号体系。黎曼偏爱用文词胜过用代数符号,对直觉的偏爱胜过过分的严格,这似乎与那个时代有点儿格格不入。一些数学家认为:与高斯以及其他数学家的著作的严密性相比,黎曼的著作——或者至少在他表达自己的著作的方式上——倒退了一步。由于黎曼的见解被证明十分有用,所以绝大多数的反对意见逐渐被人们所遗忘。

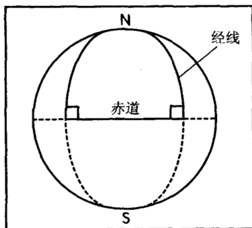
在几何学方面,黎曼从欧几里得的平行公设所提出的难题出发开始研究。虽然年轻,但他很快就进入了这个问题的前沿领域的研究。就像在前面所描述的那样,欧几里得的平行公设是一个孤立的公设,与其他公理和公设无关。这一事实早已被罗巴切夫斯基和波尔约证明。但是,黎曼似乎不知道他们的工作。无论如何,他的几何学与罗巴切夫斯基和波尔约的不同。罗巴切夫斯基和波尔约提出的替代欧几里得第五公设的命题大致相同:已知一条直线和该直线外的一点,过这点与已知直线平行的直线不止一条。另一方面,黎曼完全创造了另一个公理。实际上,这个公理陈述的是这样的内容:已知一条直线和该直线外的一点,不存在过这一点且与已知直线平行的直线。乍一看,这个公理似乎也有悖直觉,但与罗巴切夫斯基和波尔约的相比,黎曼的公理实际上更易于想象。

为了形象化地刻画这种思想,请大家想象一下在球面上而不是在平面上来研究几何学——这毕竟是地图绘制者每天所做的事情。我们把球面与包含球心的任一平面相交所确定的大圆定义为

球面上的直线，球面上的这些大圆是与直线等价的线。例如，因为每条经线终止于极点，所以每条经线是大圆的一半。赤道也是一个大圆，当然还有其他大圆。例如，考虑"倾斜"通过赤道平面(经过赤道的平面)形成的大圆，结果它既包含球心，也包含位于球面上北纬45°的一点：这个大圆有一半位于赤道之上，另一半位于赤道以下。

为了举例说明黎曼的公理，我们选取通过极点的一个大圆，不妨称它为 L_1。现在，如果选 L_1 之外的一点，那么其他任意一个包含这一点的大圆与"线"L_1 相交。为了便于理解，我们假设过这一点引一条经线，不妨称这条经线为 L_2，包含 L_2 的大圆与 L_1 相交于球面的南北极点。在大圆对应直线的球面上，不存在平行线。

与欧几里得几何学相比，黎曼的几何学有许多特殊的性质。例如，三角形的内角和大于180°。为了理解这个性质，我们返回来研究球面上的几何学。(球面只是大家熟悉的一个例子。实际上，黎曼的思想更具有一般性。)请大家考虑由两条经线和赤道所围成的三角形，每条经线都与赤道成一直角。因为两条经线在北极相交，它们之间的交角大于0°，所以三角形的内角和必定大于两直角(参见第7章的我们生活的空间是欧几里得空间吗？这一节内容)。



球面上由赤道和两条经线构成的三角形包含两个直角(位于这个三角形的底边上)和非零的一个顶角。这表明了：这样的三角形的内角和大于180°。

黎曼也推广了普通的欧几里得空间的几何学，我们在那儿最初使用了欧几里得空间这个术语来代替所谓的二维或三维空间，并在此空间里建立了笛卡儿坐标系。黎曼把这种思想推广到四维和更高维（一般是 n）空间，n 维空间里的点与“n 元”实数（$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$）成一一对应。我们运用这种方法，能够建立一个有关 n 维空间的坐标系。

黎曼也致力于构造其他类型的空间，他对弯曲空间的思想尤为感兴趣。如果存在高维的弯曲空间，几乎没人能够想象出它们是什么样子的。因此，在试图确定任意一个这样的空间是平展的还是弯曲的，甚至“平展的”和“弯曲的”这两个术语在这些情形中是否有含义时，我们的直觉没有什么价值。然而，空间可以是弯曲的，黎曼需要一种能够使他确定给定空间是弯曲的还是平展的法则。他发现了自己正在寻找的法则，这个法则依赖于毕达哥拉斯定理。

在欧几里得空间中，笛卡儿坐标系下的毕达哥拉斯定理可以解释成一个距离公式。如果（x_1, y_1）和（x_2, y_2）是二维空间中的两个点，则这两点之间的距离是$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。这个公式很容易推广到 n 维空间。如果（$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$）和（$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$）是 n 维空间中的两个点，那么它们之间的距离就是$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(x_3-y_3)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$。这个公式好像比二维空间的要复杂，但思想恰恰相同。它们之间的唯一不同是：与二维空间相比，n 维空间需要更多的项来表示距离。

黎曼声称：不管空间的维数是多少，如果空间中两点之间的距离由距离公式——广义的毕达哥拉斯定理——给出，那么这个空

间就是欧几里得空间。与平坦的表面类似,他称这些空间为平展空间,这是因为这些空间中的距离公式很容易解释为毕达哥拉斯定理的一个应用。

当然,这些内容根本没有回答任何问题。什么是点?我们为什么关注维数高于三的空间的几何学?对于这些问题,有两种回答。第一,虽然我们的感觉和知觉不能扩展到高维空间,但我们能够想象得到。当数学家、科学家和工程师们解决涉及许多个独立变量的实际问题时,他们经常发现这样的一个事实:在高维空间中计算是很方便的,有时甚至是必要的。这类问题出现在多个领域当中:航海学、股票市场分析、气象学和其他许多领域。理解高维空间中的几何性质在这方面总是有益的,有时甚至是必不可少的。

然而,解决实际问题并不是黎曼追求的目标,他寻求"从内部"来理解几何学。黎曼正在寻找空间内蕴的几何学,而不管空间是二维的、三维的还是更高维的。幸运的是,在二维曲面上的发现已经能够应用于高维空间。例如,我们已经大体上描述了曲面,似乎我们自己就位于研究的曲面之外。人们很容易从外部观察到有关这个曲面的几个性质。例如,我们能够从外部看到这个曲面是否弯曲,也能够观察到这个曲面是有限大,还是延伸到无穷远处。现在,设想在这个曲面上生活着一个虚构的生物。黎曼想知道:在不从曲面外一点作任何测量和观察的情况下,这个生物如何来确定它所生活的曲面上的几何学。

黎曼考虑的不止是曲面。例如,他想了解这样的一个事实:在不从空间外做任何测量和观察的情况下,三维空间中的生物怎样确定它们所生活的空间的几何学。如果这听起来太理论化而没有什么价值,我们发现自己就生活在这样的情形里,我们没有办法离

开这个空间而从外面观察它。因此,我们的有关空间几何学的任何结论必定是从内部作出的。正是由于黎曼的愿望,这些研究才最终被证明对科学有用。

在对“内蕴几何学”的研究里,黎曼设想了一个测地线系统,这些测地线在空间里的作用与平展的欧几里得空间里的坐标线相同。一个完整的测地线集合可以给出一个坐标系,它能够使虚构的生物找到穿过空间的道路。例如,经线和纬线能够使我们找到地球上的道路。在欧几里得空间里,两点之间的直线距离最短;弯曲空间里两点之间的最短距离是测地线,它们也能够用于计算距离。对于空间内部的一个生物,测地线系统与欧几里得坐标系类似,这就像在切点附近一个曲面与它的切平面类似一样。

一个生活在空间内部的生物能够从弯曲空间中辨别出普通的三维欧几里得空间(与二维的情形类似,有时也称作空间)吗？黎曼的回答是肯定的。我们借助毕达哥拉斯定理,能够从内部来研究空间的曲率:如果两点之间的距离不能用毕达哥拉斯定理来计算,那么这个空间就不是欧几里得空间,它必定是弯曲空间。事实上,我们可以用实际距离与用毕达哥拉斯定理计算的距离的偏差的大小来研究空间曲率的大小。

空间曲率这个概念十分重要,那是因为它能够代表空间的大小和形状。如果空间在大小上是无界的,那么它就没有边界。在一个无限的范围里,可以存在有如下性质的无界:如果通过这个边界,那将位于“研究的这个边界的外部”。范围无限隐含着没有边界。但是,反过来是错误的。如果我们主张空间没有边界,那么未必能推出空间在范围上是无限的。

在地球表面上的旅行能够证明这一点。在过去,许多人持有

这样的观点:地球有边界,如果一个人沿直线走得足够远,那么他会跌到边界之外。当然,并不是每个人都相信这一点。葡萄牙的水手和探险家麦哲伦(Ferdinand Magellan,约1480—1511)* 领导了一次不断向西航行的探险。这个探险队不但没有跌到地球之外,而且最终回到了出发的港口。这趟航行戏剧性地证明了地球表面没有边界。我们可以沿任一方向环绕着海洋永远地行驶下去,而不会掉下去,这是地球表面弯曲的结果:地球没有麦哲伦和他的船员掉下去的边界。但地球表面的范围也不是无限的。因为地球表面的范围有限,所以就像麦哲伦的探险队一样,在地球表面上沿任一方向前进的旅行者最终都会回到出发点。

上述事实之所以重要的原因是:如果空间是弯曲的,那么就会发生一种类似的现象。如果我们沿宇宙中和地球的大圆等价的曲线旅行,那么就会像麦哲伦的船队一样,只要不断向前运动,最终也将回到出发点。黎曼用高度抽象的方式论述了一些最重要的科学问题:宇宙的形状是什么样子的?我们怎样才能够知道自己的观点是正确的?

* 原书麦哲伦卒年有误,应为1521年——校者。

第十一章　时空观的形成

许多数学家发现黎曼的思想十分有趣,而且引人入胜。他的观念从根本上导致了对几何学以及研究几何学的方法的重新评价。黎曼希望能在物理学中进一步理解这些思想。虽然它们最终在数学之外找到了应用,但黎曼本人没有目睹到这一切发生。但是,不久之后,有关空间曲率的思想进入了现代物理学。同样地,也没过多久,与牛顿所重视的绝对时空的普通几何学相比,黎曼的奇怪的几何学开始看起来更适合刻画宇宙的结构。

美籍德国物理学家爱因斯坦(Albert Einstein,1879—1955)发现这样一个事实:宇宙的几何学实际上比牛顿想象的要复杂得多。他的发现改变了物理学家对空间和时间的看法。虽然爱因斯坦本人不是一位数学家——实际上,他似乎总是不厌其烦地讲自己在数学上遇到的困难,但他的发现大大促进了微分几何学的研究。弯曲的宇宙不再简单地是虚构生物所生活的虚拟的栖息地了,它与每个人都息息相关。在爱因斯坦发表第一篇关于相对论的论文一百年以后,论文里所包含的思想和观点仍然激励着微分几何学这个领域里的研究。

爱因斯坦出生于德国。虽然他在文法学校和中学学习期间自始至终都是一个平庸无奇的学生,但他很小时就对物理学着迷。实际上,在青少年时期,他的兴趣主要集中在两方面:物理学和音

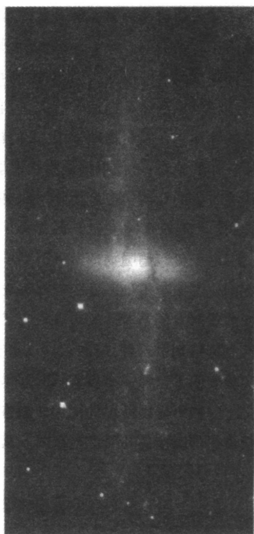
乐。叔叔教他科学和数学，母亲把他领入音乐的殿堂。在以后的日子里，无论身处顺境还是遭受挫折，爱因斯坦都一直拉着自己的小提琴，也一直从事着物理学研究——虽然未必按照那种顺序。

爱因斯坦曾经就读于瑞士苏黎世的联邦工科学院。毕业后，他成为一名瑞士公民。在中学当了很短一段时间的数学教师后，他最后找到了一份专利员的工作，对申请专利保护作出评价。显然那个时代对这种工作的要求不太高，爱因斯坦在自己的大部分空闲时间里继续从事着物理学研究。1905 年，他发表了四篇论文。那篇关于布朗运动的论文使他能够获得苏黎世大学的博士学位。另一篇关于狭义相对论(现在以这个名字著称)的论文改变了科学家关于宇宙的几何学的观点，并证明了牛顿的参照系对于某些应用是不成立的。

尽管这些论文离获得公众的普遍认可还有一些年头，但它们吸引了其他科学家的关注。爱因斯坦辞去了专利局职员的工作，在接下来的几年时间里在几所欧洲大学任教，其中包括他的母校苏黎世的联邦工科学院以及后来的柏林大学。当第一次世界大战爆发时，正在柏林的他参加了反战运动。在绝大部分时间里，爱因斯坦利用自己的显要地位来试图推进他的和平主义观点。他在这方面做得并不成功，这是他个人悲观失望，而且偶尔还感到痛苦的一个缘由。和许多其他的犹太学者一样，爱因斯坦在纳粹 1933 年上台执政后不久便逃离了德国。他历经千辛万苦冲破重重阻碍来到美国，定居于新泽西州的普林斯顿。

爱因斯坦出名后，他的兴趣发生了转移。他花费多年时间来竭力反对被称作量子力学的物理学新分支里的许多发现上。虽然当时的许多物理学家承认从这个领域里产生的新观点的价值和重

要性，但爱因斯坦接受这些观点有点儿困难，他关于量子力学的努力最终徒劳无获。人们纪念爱因斯坦的另一个原因是这样一个事实：他把罗斯福（Franklin Roosevelt）总统的注意力吸引到有关原子分裂研究的潜在危险上来，当时这项研究正在欧洲进行。在写给总统的一封信里，爱因斯坦大致描述了用这种新能源发明一种新型武器的可能性。但写这封信不是爱因斯坦本人的主意，而是其他科学家督促他写。爱因斯坦作为一名科学家的突出地位使得罗斯福认真考虑这种可行性。最终的结果是导致曼哈顿工程上马，这是美国在战争时为生产原子弹努力争取的成功结果。爱因斯坦本人并没有参与这项工程。



极环星系。（Courtesy of National Aeronautics and Space Administration）

二战后，爱因斯坦倡导要创建唯一的一个世界政府，利用它来保护人类免受更大规模的战争冲突。不幸的是，他的健康状况恶化。在普林斯顿的一家医院里，爱因斯坦在睡梦中去世。

爱因斯坦在科学上最著名的贡献当然是相对论。长期以来，虽然相对论仍旧被称为理论，但从爱因斯坦的宇宙模型里所作出的许多预测已经被证实，相对论现在是一个被明确证实的科学事实。相对论当然与物理学有关，但它也是一个强有力的有关几何学的陈述。在经典物理学中，人们认为时空的几何学和物理学定律一样的绝对：就像牛顿认为物理学定律在各处都相同一样，他们认为时空的几何学也是如此。到19世纪下半叶时，这种认识开始转变。

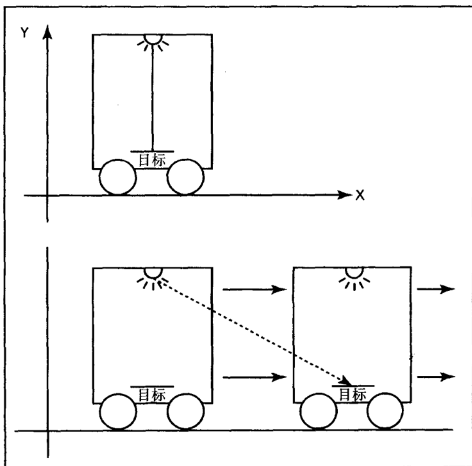
由于美籍德国物理学家迈克尔逊(Albert Abraham Michelson)和美国化学家莫雷(Edward Williams Morley)认真做的一系列实验，牛顿关于时空的绝对性的观点引起了人们的置疑。这些实验的重要性立刻得到了认可，现在它们以迈克尔森-莫雷实验著称。这些实验表明了这样一个事实：物理学定律和时空的几何学不可能都是绝对的。爱因斯坦的伟大成就在于：他表明了物理学定律比牛顿设想的时空的几何学更重要。其结果就是相对论。

几何学和狭义相对论

爱因斯坦关于相对论的观点一般被表述为两部分：狭义相对论和广义相对论。前者先发表。坐标系和有关直角三角形的几何学这两者在几何学史上起着重要的作用，狭义相对论就是这两种思想的一个完美应用，它的内容如下：物理学定律，包括光速，对于任意一个作匀速运动(匀速运动是一种保持恒定速度的直线运动)的参照系(坐标系)都相同。

为了理解上述论断如何破坏了牛顿所想象的时空的几何学，

我们可以做一个简单的思维实验。设想有一个长方形盒子,并在盒子顶部放置一个激光器,使它指向下方,以便当打开激光器时,它会照亮正下方盒子底部的位置。我们称激光器正下方的位置为目标。光的速度是每秒300 000千米。因此,在打开激光器以后,目标几乎立刻被照亮,但有一个微小的延迟。激光到达盒子底部需要一段时间。因为有一个微小的延迟,真空里的光速又固定不



激光从盒顶到达盒底目标所需的时间可以用于校准钟表。我们可以推出如下结论:对于不同参考系下的观察者来讲,时间消逝的速率是不同的。

变，所以我们可以把激光器用作一种钟表，不妨设激光从盒子顶部到达下面的目标所需要的时间是一个时间单位。

现在，让我们来想象四件事情：(1)这个盒子沿一条直线以固定速度运动。(2)打开了激光器。(3)我们在盒子内部观察激光束从盒子顶部向目标传播。(4) 当盒子直接掠过我们的视野时，也想象从盒子外部的一个位置静止地观察激光器。

如果我们在盒子内部，其参照系(坐标系)就是盒子本身，坐标系的原点是盒子内部或盒子上的一个点。这样的坐标系能够让我们观察到物体相对于我们以及相对于盒子内部是如何运动的。因为我们相对于盒子是静止不动的，所以对我们来讲，这是“合适的”坐标系。在这样的坐标系里，光线从盒子顶部到达目标所用的时间是一个时间单位。不管盒子的速度是多少，该时间单位对于盒子里面的人都一样，因为根据狭义相对论原理，在任意一个做匀速运动的参照系下光速都相同。

另一方面，如果我们位于盒子外部且相对于盒子静止不动，那么当盒子运动经过我们身边时，我们就会观察到这样一个事实：当激光束从盒子顶部向目标传播时，它的末端沿对角线传播，其原因是盒子相对于它之外的坐标系不是静止不动的。如果在我们的坐标系下光线沿竖直方向传播，那么它就不会照到盒子底部的目标，因为盒子已经移动了。如果盒子相对于我们的观察点正在向右运动，那么激光束的末端也相对于我们的观察点正在向右运动。如果不是那样的话，它就不会照到目标，毕竟这是一个在移动的目标。这些观测可以让我们想象到一个直角三角形，盒子的竖直边是这个直角三角形的一条边。在激光器打开到照亮目标的这段时间里，目标所移动的距离是这个三角形的第二条边，激光束的末端

经过的路径是这个三角形的斜边(见插图)。因为斜边总比其余两条边长,且光速对于任意一个参照系总是相同的,所以从盒子外面我们的角度来看,激光到达目标需要更长的时间。(激光通过的对角线距离能够用毕达哥拉斯定理计算出来。)因为我们把激光器当作一种钟表,所以这表明了如下事实:从盒子外面静止的观察者的角度来看,盒子内部的时间比外部过得要慢(为了计算究竟慢多少,参见毕达哥拉斯定理和狭义相对论)。

当然,"慢"和"快"是相对的。对于盒子里面的人来说,一切和它们的本来面目一样。激光从盒子顶部到达底部的目标所需时间仍恰好是一个时间单位。这个事实不可能改变,因为(根据狭义相对论)在每个匀速运动的参照系下,光速都是一样的。

时间的流逝对于不同的观察者是有差异的。同样地,距离对于不同参照系下的观察者也是如此。人们对此不应该感到奇怪。如果时间能够膨胀,那么我们也应该期望距离发生了变化。(根据经验,我们经常假定时间和距离是等价的量。当描述一个地点距离此地有两小时的行程时,我们正在用时间上的度量来代替距离上的度量。)

同样地,为了理解距离对于不同的观察者会有如何不同,请大家设想空间里有两颗彼此之间不作相对运动的行星。我们不妨假定:从生活在其中一颗行星上的一个生物的角度来看,这两颗行星相距一光年(一光年是光线在一年中传播的距离)。因此,从这个生物的角度来看,从一颗行星到达另一颗行星所需时间必定至少是一年,因为光传播得最快。但对于在这两颗行星之间飞行的火箭内部的一个旅行者和位于其中一颗行星上的观察者来说,前者感觉时间过得要慢。这与我们前面描述的那种情况的原因相同:

毕达哥拉斯定理和狭义相对论

毕达哥拉斯定理是几何学里最古老的公式之一，要计算出运动的盒子内部的时间相对于外部慢多少只需用到这个定理。首先，我们计算在正文主体部分里所描述的三角形的水平侧边和竖直侧边的长度。设 t 代表激光从盒子顶部到达底部所需的时间，这里 t 从盒子内部来测量。设 $\bar{t}$ 代表激光从盒子顶部到达底部所需的时间，这里 $\bar{t}$ 从盒子外部来测量。我们的目标是用 $\bar{t}$ 来计算 t。

不妨设 v 代表盒子向右运动的速度，我们很容易计算出盒子在从激光器打开到照亮目标这段时间内向右运动的距离，这段距离是 $v\bar{t}$，盒子的高度也能够用时间来计算。因为光线总是以固定的速度传播——用字母 C 来表示光速。在两个坐标系下从盒子顶部到底部的距离都是 Ct。斜边的长是 $C\bar{t}$，即从

对于盒子里面的观察者和盒子之外的坐标系下的观察者来说，前者感觉时间过得要慢。而且，火箭飞行得越快，火箭里面的时间相对于行星上的就越慢。这就意味着：从火箭里面的某个人的角度来看，从一颗行星到达另一颗行星可能只需要 6 个月的时间。这不可能意味着火箭的飞行速度比光速要快，那同样因为光线传播的速度最快。这些事实只能意味着：从火箭里面的某个人的角度来看，两个行星之间的距离小于一光年。相对于光速运行得越快，距离就会变得越短。虽然“物理学定律对于任意一个以固定速度沿一条直线运动的参照系都是相同的”这一事实听起来简单，但这一陈述却意味着：时间和空间都不是绝对的。没有什么例外：宇宙

盒子外面测量时，这个距离等于光速乘以从激光器打开到照亮目标所需时间的积。$C\bar{t}$、$v\bar{t}$ 与 Ct 这三个长度通过毕达哥拉斯定理联系起来：$C^2\bar{t}^2 = v^2\bar{t}^2 + C^2t^2$。我们运用一点儿代数的知识来解这个关于 t 的方程，结果是 $t = \bar{t}\sqrt{1 - v^2/C^2}$。这表明了：与这个坐标系下位于盒子外面的观察者相比，盒子内部的时间过得要慢，并且如果让盒子的速度 v 足够大的话，那么我们让时间有多慢它就有多慢。当 v 大约是 $0.87C$ 时，或者说光速的 87% 时，盒子内部的时间消逝的速度仅是这个坐标系下位于盒子外部的观察者的一半。

我们必须记住这样一个事实：这只是时间本身的一个变化，它与时钟的机械影响无关。与盒子外部的时间相比，盒子内部的时间本身就是以不同的速率流逝着，这是如下论断的一个纯粹逻辑上的结果：物理学的定律（包括光速）在每个以固定速度沿直线运动的参照系下都相同。

的几何学比它初看起来似乎要复杂，宇宙的几何学不是一成不变的。

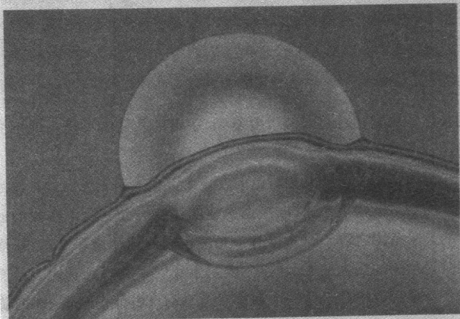
爱因斯坦关于狭义相对论的发现令许多人感到惊讶。其原因是他的结果依赖于光速，以接近光速的速度运动完全不在我们通常的经验范围之内。因为相对于光速我们的运动是那么的慢，而相对论预测的变化是那么的小，以至于我们察觉不到它们。虽然当一个观察者相对于另一个观察者运动时，时间和空间的相对膨胀已经发生，但它们是那样的小，以至于没有人知道，直到爱因斯坦推断出了它们的存在。

后来，爱因斯坦发表了他的广义相对论，这个一般的理论表明

几何学和“普通”曲面的科学

我们经常把微分几何学与相对论联系在一起。相对论作出了许多令人意想不到的、十分惊人的有关宇宙形状的预测，而且这些预测是用微分几何学的语言作出的。虽然它们未被人们广泛理解，但相对论是一个著名的理论。而对弯曲曲面的研究被证明在其他领域里也非常重要，其中的一个重要应用与地面径流的物理学有关。

现在，大部分“实践的”科学博物馆都有称作气泡升降机的装置。它由一个长方形框架、一根横木、几根绳索和事先准备好的一槽液体构成。绳索系在框架的两端，而且穿过横木里的



几何学的研究以及薄膜内流体运动学的研究成为应用数学的一个重要分支。(CORBIS)

小孔。我们通过一根绳子将横木下降至液槽中，当用力拉这根横木时（通常借助一根绳子），就会在它后面产生一个大的肥皂膜。肥皂膜从一根绳索扩展到另一根绳索，从横木扩展到液槽。它比头发都细，尤其是，它比自身的宽度和高度小几百万倍。如果仔细研究这个气泡，就会表明这样一个事实：它不是静止不动的，液体正在以一种复杂的方式从肥皂膜上流下来。

复杂的二维流动有时能够用我们所熟悉的平面上普通的笛卡儿坐标系来刻画，但在这时存在着使这样的刻画变得不可能的复杂情形。薄膜很容易变形，微风就能够使它弯曲。框架的微小振动通过横木和绳索传到薄膜上，薄膜这个二维曲面就会通过变形对这些力作出回应，使薄膜保持一体的力是从曲面内部施加的。在某种程度上，这些力的强度是由曲面的曲率所决定的。与此同时，薄膜内部液体的运动连续地对应于曲面的曲率，这类现象的成功模型必须建立在曲面的内蕴几何学的基础之上。换句话而言，科学家需要黎曼所开创的更为复杂的几何学来刻画气泡升降机里的流体物理学。

现在，人们运用这些几何思想的范围十分广泛。例如，当两种不混溶的液体（例如油和水）互相接触时，它们会在一个不断变化形状的曲面处相互作用。如果我们想要控制涉及两种难混合的液体的过程，理解这两种液体之间的分界面的动力学原理就显得非常重要。火焰锋面传播是以运用内蕴于曲面的几何方法为例的一种现象的另一个例子。在这个模型中，火焰是两种不同的物质——反应物（燃烧的化学物质）和生成物（燃烧反应后生成的化学物质）——之间的分界面。由一个曲面所

分离的两种单独物质相互作用的几乎任一过程，都能够从这类分析里获益。如果黎曼有幸看到如下的情况，他当然会高兴：大约在一个半世纪以前，由他所解决的高度抽象的问题现在正应用于这样的实际问题。

了这样一个事实：空间和时间比他的狭义相对论指出的甚至更为多变。宇宙的几何学不仅有可能是膨胀的，而且有可能是弯曲的。黎曼原本希望知道：在不离开一个曲面的情况下，一个生活在这个弯曲曲面上的虚拟生命能够发现有关该曲面的多少性质。现在，科学家和数学家都对他的问题感兴趣，科学家也想知道宇宙的几何结构。爱因斯坦指出：空间有可能是弯曲的，但它怎样弯曲，沿什么方向弯曲？这些问题仍在进一步研究之中。

诺特和对称性

人们有时把爱因斯坦描述得有点儿像科学预言家，他把同时代的物理学家引入到了一个崭新的、相对论的世界中。但是，值得我们回顾的是：在他自己作出的发现的那个时代，爱因斯坦并不是唯一一位寻找迈克尔逊－莫雷实验的满意解释的科学家。他不是唯一一位认识到旧概念不足以解释新数据的科学家，也不是唯一一位怀疑迈克尔逊－莫雷实验指出了通向物理学里下一个伟大思想的道路的科学家。

我们可以确信这样一个事实：爱因斯坦是第一个提出相对论的科学家，但他的思想并没有远远超越那个时代，而导致无人赏识。许多物理学家和数学家很快认识到了他的发现的正确性。对

于重要的发现来讲，情况并不总是如此，也有许多这样的科学家和数学家：因为他们太超前了，以至于他们的贡献直到他们去世后很久才被人们认可。爱因斯坦是个例外。在爱因斯坦开始发表他的观点之后的几年时间里，相对论及其主要理论家都变得非常出名。

和爱因斯坦的同时代的科学家一样，通俗报刊也总是给相对论以很大关注。一方面，这让人感到奇怪。只有在远远超出普通人的经验的条件下，相对论预测的时空膨胀才会变得显而易见。不管在报纸和杂志中关于以不同速度运动和成长的双胞胎的所有描述多么详尽，没有一个人曾经相对于另外一个人以非常接近光速的速度运动，也没有一个国家打算在不远的将来促成一名宇航员或太空人达到这样的速度。要达到这样的速度（然后再慢下来）有着相当大的实际困难。

虽然相对论在许多方面是以前的思想，但是，甚至它的十分基本的预测仍然使受过教育的科学家和有兴趣的外行为之着迷。在某种程度上，这种持久的兴趣肯定是由于相对论所预测的如下事实：时间和空间是不确定的。据爱因斯坦所述，几何学并不像绝大多数人想象的那样基本。

古希腊人没有现代意义上的物理学，他们通过几何学来了解自然。古希腊的科学是应用的几何学，希腊人没有力、质量和能量的概念，他们把几何学看作是自然界中重要的组织原理。后来，伽利略、牛顿和其他科学家把几何学和物理学视为互为补充的学科。虽然存在一些支配物体运动的定律——物理定律，但这些运动和描述运动的定律存在于几何背景当中，即由牛顿所描述的绝对时空的几何学。爱因斯坦断言：几何学定律（就像从古至今所理解的那样）和物理学定律有时存在互相矛盾的情况。这是他的伟大发

现——当物理学和几何学之间产生矛盾时,物理学占上风——的其中一部分。距离改变了,时间膨胀了,但光速保持不变。当爱因斯坦首次提出这种观点时,许多人感到不可思议,现在我们中仍有许多人对此感到惊讶。

几何学似乎已经从占据人们几千年的想象力的地位上“下台”了,而且在某些方面这恰恰已经发生了。但是,在爱因斯坦于1915年发表的关于广义相对论的论文后不久,人们再次成功地提出了如下的思想:几何学是自然界中的一种重要的组织原理。(广义相对论是狭义相对论的思想的一种推广,后者在前面部分里已经叙述过了。)重新证明几何学的重要性(几何学是自然界中的一个组织原理)的人是德国的数学家诺特(Emmy Noether,1882—1935)。

诺特在德国的埃尔朗根长大。她是著名数学家兼埃尔朗根大学的教授M.诺特(Max Noether)的女儿。早在青少年时代,年少的诺特就在语言方面表现出特殊的天赋,她最初的人生目标是在中学里当一名外语教师。为了实现这个目标,她获得了英语和法语教师的资格证书,但她本人从未当过语言教师。相反,她开始研究高等数学。

对于当时德国的女性来讲,研究高等数学是一条艰难的职业道路。只有得到教师的许可,女性才可以学习大学水平的课程。此外,女性不可以参加能够成为大学教职员的考试,这是人们普遍遵守的一个规则。诺特发现自己正处于这样的境地。

诺特终于在1907年获得埃尔朗根大学的博士学位。她继续在埃尔朗根待了一段时间,偶尔替父亲上几节课,但这样做并没有任何报酬。她仍旧从事着自己的研究,并且终于引起了哥廷根大

学的希尔伯特和克莱因的注意。1915 年,诺特来到哥廷根。虽然希尔伯特和克莱因主张哥廷根大学应该给她提供施展才华的职位,但最初遭到了校方拒绝。其他的教职员反对雇用女性。尽管如此,诺特开始以希尔伯特的名义上一些临时的课程。当她变得更加出名时,哥廷根大学之外的数学家也开始旁听她教授的课程。1919 年,她在哥廷根大学正式任职。诺特一直在这所大学工作,直至 1933 年她和其他犹太教职员被解雇。接下来,她来到美国,随后在新泽西州普林斯顿的普林斯顿高等研究院和宾夕法尼亚州的布林莫尔学院从事教学工作,一直到由于一次手术引起的并发症去世。

为了高度评价诺特对几何学所作出的贡献,我们对守恒定律有所了解是有益的。守恒定律是一个对某种性质(例如,能量)保持不变的陈述。"守恒"这个词在这儿有着十分特殊的用法,它意味着:在一个与周围环境隔离的系统里——例如,把所研究的物质密封在一个试管内部——保持的性质是总量不变。质量、动量和能量都是保持性质不变的例子。更一般的,如果系统没有与周围环境隔离,那么通过测量多少物质越过了这个系统的边界,就应该能够追寻到(保持的)性质的变化。因为保留下来了这个性质,所以系统内部的性质能够增加的唯一方式是:如果更多的物质从外部进入这个系统,能够减少的唯一方式是:如果一些物质越过这个系统的边界进入外部。

下面以质量的守恒为例进行说明。质量守恒是经典物理学里的一个基本原则:质量在化学反应过程中保持不变。换句话而言,如果我们使密封的试管内部发生化学反应,那么试管内物质的质量在反应前后相同(这就是"守恒"的含义)。尤其是,如果我们想

要减少试管内物质的质量,那么必须允许试管内的一些物质越过试管的边界。这一事实的一种正规化的表述方法是:如果想让质量减少,那就必须从试管里取出一些物质。我们不可能轻易地使试管内的物质消失。

当爱因斯坦首次提出自己关于相对论的思想时,在一些科学家之间就存在着有关能量在爱因斯坦的相对论里是否守恒的问题。(从19世纪中期开始,能量守恒这个性质是科学中的一个基本原则。)如果能够证明能量不守恒,那么爱因斯坦的思想的正确性就令人怀疑。虽然希尔伯特对相对论十分感兴趣,但他也不能解决能量守恒的问题,于是他让诺特来研究这个问题。

诺特通过对守恒定律普遍性质的一些重要思考,很快地给出了答案。她发现这样一个事实:守恒定律和几何学的对称原理之间存在着十分密切的关系。前者是几百年来建立西方科学的重要概念。

对称性是几何学中一个重要的组织原理,某些类型的对称是我们大家都熟悉的。大部分人的身体几乎是完美地对称,身体的左半部(差不多)是右半部的镜像,这种情形之下的术语是“双向对称”。其他类型的对称也是有可能的。例如,柱面关于通过它的对称轴的直线是旋转对称的:无论我们怎样让柱面围绕那条线旋转,柱面本身在空间里所占的位置都不会改变。许多年以来,人们推广了有关对称的思想,从而使数学家们能够讨论几类不同的对称,其中的一些比较容易理解,另外一些则不然。

下面我们回到前一段所谈到的柱面上。假设我们构造了一个集合,每个元素都是使得柱面的空间构造保持不变的几何变换(第六章已经谈过几何变换了)。就像前一段指出的那样,我们能够让

柱面围绕它的对称轴旋转，而且在旋转前后柱面在空间里所处的位置相同，因此旋转属于这个变换集。接下来，请大家考虑柱面关于平面的反射，满足下面的条件：平面经过柱面的中心，并且与柱面的对称轴垂直。这个变换会产生柱面的一个"镜像"，它也属于上面的变换集。我们还可以找出柱面的许多这样的变换：如果任取柱面的两个对称变换，并通过在柱面上先施行一个变换，接下来再施行另一个变换，并使它们相结合——这叫做变换的积，那么还会得到另一个对称变换。实际上，有关柱面的这样的对称变换构成的集合是一个群。这样的对称群的存在性以及它们的逻辑结构在物理学和数学中一样重要。

诺特发现这样一个事实：每个守恒定律都是一个关于某类特殊的对称性的论断，反过来，由一个方程组所给出的每个对称群都对应着某类守恒定律。例如，诺特发现的其中一个结果是：能量守恒定律也是一个有关对称的论断，它是关于时间的。为了理解这其中的原因，不妨把时间想象成一条线。我们可以想象自己能够沿着这条线前后平移，偶尔可以停下来去观察一个特殊的孤立系统。能量守恒是在断言这样的事实：无论我们沿着这条时间线运动到哪里，那个孤立系统的能量在过去和将来都是一样的。像镜像一样，不管我们选择停在线上的哪个位置，这个系统的条件在我们所处位置的两侧都是相同的。事实上，能量守恒这个原理能够成立，当且仅当关于时间的这种对称成立。换句话而言，如果对称条件成立，那么无论如何来划分这条时间线，这种划分的一侧（称"将来的"一侧）的能量都是另一侧（"过去的"一侧）的能量的镜像。反过来，如果能量守恒，那么关于时间的对称必定也成立。

我们甚至能够通过简单地叙述如下的事实——物理学的定律

关于一个被称作对称变换的庞加莱群（Poincaré group）是不变的——来概括爱因斯坦的狭义相对论。

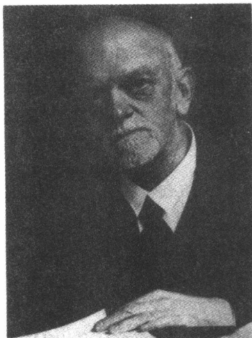
诺特关于对称在物理学中作用的观察资料，使得几何学重新成为科学中的一个组织原理。虽然物理学定律确实战胜了绝对时间和绝对空间的旧思想，但现在人们已经知道物理学定律本身是某些几何原理的表达。几何对称性和自然定律不可能被视为互相对立的概念，这些定律的真实性依赖对称性的正确性，对称性的正确性确保定律的真实性。

第十二章　无限维几何学

我们的直觉对于理解二维和三维的几何学总是一个有用的向导，这是希腊的几何学家通过研究证明的一个颠扑不破的事实。19世纪，黎曼把几何学从二维和三维的空间推广到更高维的空间。虽然人们想象四维、五维和更高维的空间的几何学更加富有挑战性，但就像黎曼证明的那样，二维和三维空间的许多性质可以直接转移到高维空间上。然而，黎曼考虑的所有空间都是有限维的，即：表示空间维数的数字可能很大，但却是一个有限值。到了20世纪时，当一些数学家开始研究无限维空间时，局限于有限维的条件就不存在了。

构造和研究无限维空间的许多促进因素产生于人们理解函数集的需要。数学家们把抽象的函数集的研究称为泛函分析。这门学科由德国数学家、物理学家希尔伯特（David Hilbert，1852—1943）所开创，现在许多最普遍的无限维空间都归于希尔伯特空间。

希尔伯特是20世纪里学识最渊博和最富有影响力的数学家之一。虽然他逝世于20世纪的前半个世纪，但他的影响却持续到了上个世纪末。希尔伯特出生于柯尼斯堡，也就是现在的加里宁格勒。他曾经在那里上过大学。在获得博士学位后，他又在那儿当了几年教师。最后，和几何学史上的许多重要人物一样，希尔伯特成为哥廷根大学的一名教师，并在那里度过了自己的余生。



希尔伯特，20世纪最有影响力的数学家之一。(Baldwin G. Ward & Kathryn C. Ward/CORBIS)

希尔伯特在数学和物理学的几个领域里作出了许多重要的贡献。他建立了相对论所谓的场方程——相对论思想的数学表达式，这和爱因斯坦创立相对论大约是在同一时间。他还在物理学的其他分支里作出了重要贡献。不仅如此，希尔伯特在代数学方面也作出了重要发现，建立了欧几里得几何学的一个完全的、逻辑上相容的公理系统。希尔伯特对后来几代数学家的影响源于他在1900年提出来的一系列问题。在巴黎举行的国际数学家大会上所作的演讲中，他叙述了那些自己认为对新世纪数学的发展非常重要的问题。在演讲中，他把这23个问题看作是数学研究的中心。虽然很少有人怀疑是因为他自己的职业声望而引起了人们对这个问题列表的关注，并且让人们更加重视这些问题，但希尔伯特选取的问题的确引导了整个20世纪数学的研究。

在这一章里我们最感兴趣的无限维空间——希尔伯特空间，这听起来有点让人感到奇怪。无限维空间在某些方面确实如此，它们有许多不同于有限维空间的性质。然而，我们曾经遇到过“平直的”有限维空间的性质，希尔伯特空间的许多基本性质正是它们

相对简单的推广。例如，为了研究希尔伯特空间，首先需要一种能够在空间里“找出道路”的方法：为了达到这个目标，我们需要引进坐标系。请大家回想一下：在对二维空间的研究中，数学家们把一个有序的数对(x_1, x_2)与空间中的每个点相联系。在三维空间里，他们又把有序的三元组(x_1, x_2, x_3)与空间中的每个点相联系。更一般的，在 n 维空间里（这里 n 代表任一自然数），我们建立了空间中的点与有序的 n 元组$(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n)$之间的一个对应。依照这种方式，我们所考虑的希尔伯特空间中的每个点都能与一个有序的、无限的数列$(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots)$相对应。虽然就像我们在下面即将看到的那样，但这种推广可能不像最初看起来那么直接。

在确立了这个无限维空间中点的位置后，我们必须找到一种测量距离的方法。我们再次用有限维空间作指导。在二维空间里，任意两个点(x_1, x_2)和(y_1, y_2)之间的距离由毕达哥拉斯定理给出：$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$。在 n 维空间里，任意两个点$(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n)$和$(y_1, y_2, y_3, y_4, \cdots, y_n)$之间的距离用推广的毕达哥拉斯定理来定义：$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$。在一个无限维的空间里，任意两个点$(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots)$和$(y_1, y_2, y_3, y_4, \cdots)$之间的距离也由毕达哥拉斯定理的一个简单推广给出：$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots}$。

当我们试图应用上面的距离公式时，有限维空间和无限维空间之间的一个重要的不同出现了。在 n 维的欧几里得空间里（这里 n 代表任一自然数），任意一个由 n 个数所构成的集合就可以确定空间中的一个点。例如，$(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots x_n)$这个点位于距

离原点$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2}$的地方。对于希尔伯特空间来讲，相对应的情形更为复杂。为了观察到其中的不同之处，不妨设(x_1, x_2, x_3, x_4, …)有可能表示希尔伯特空间中的一个点。请大家考虑$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots}$这个表达式，它表示从坐标原点到($x_1$, x_2, x_3, x_4, …)这个点的距离(原点的坐标是(0,0,0,…))。根号下的和很有可能是“发散的”，即假设可以在这个级数里添加足够多的项，那么这个和能够变得比我们想象的任何数都大。另一方面，这个和有可能是“收敛的”，那就意味着无论我们在这个和里一共添加多少项，它总是小于某个固定的数。在后一种情形里，根号下的“无限和”就表示某个数。如果根号下面的和收敛，那么(x_1, x_2, x_3, x_4, …)这个点就属于希尔伯特空间。但是，如果这个和发散，那么就可以得出结论：相应的无穷数列不表示希尔伯特空间中的一个点。我们有许多不能够与希尔伯特空间中的点对应的无穷序列。(1,1,1,…)这个点就是这种序列的其中一个例子。

在建立了坐标系并找到一种计算距离的方法之后，我们可以开始讨论无限维空间的几何学了。无限维的球面、线，等等，是存在的。当然，虽然许多人无法想象出它们的样子。在我们没有能力在无限维空间里“观察”的情况下，还有一种办法。研究无限维空间的几何学的一个关键是选择刻画对象的方法，以便于它们适用于任意维数的空间。一旦这一切准备就绪后，我们就能够运用自己的三维直觉来指导对无限维的理解。

我们以球面为例。在三维空间里，一旦指定了球面半径及其中心的位置，这个球面就完全确定了：设字母 r 表示半径，那么中心在原点、半径为 r 的圆可以描述为“到原点的距离为 r 的所有点

的集合”。请大家注意：在这个定义里，我们没有提到与空间的维数相关的任何信息，而只是使用了空间有原点和距离函数这些事实。因为我们的三维定义不依赖于空间的维数，因此，对于每个有原点和距离函数的空间而言，能够使用球面的同一个定义。甚至在无限维空间里，我们的定义仍然成立：“到原点的距离为 r 的所有点的集合”是对中心在原点、半径为 r 的无穷维球面的一个完整刻画。其他的曲面及其性质可以用类似的方式来定义。

当然，所有这一切并没有指出我们为什么需要研究无限维空间。研究无限维空间的许多价值在于它们能够使我们用一种崭新的方式来理解函数。在这个十分广义的观点下，函数被描述成空间中的“点”。这种描述提供了思考函数的一种新方法，这样的“函数空间”能够使我们把学到的欧几里得空间几何学的许多知识和函数集以及函数的分析联系起来。我们可以讨论函数之间的距离，某些函数集的几何学，以及其他许多更抽象的性质，这和我们在三维空间里研究点集的方法几乎是一样的。这种分析经常为数学家提供一个有用背景来分析一个函数或一类函数的，因此这种分析的能力是十分重要的。

在建立希尔伯特空间之前，人们在理解大量函数集方面取得的进展是缓慢的，他们不得不单独地分析每个集合。实际上，虽然这些集合中有许多可以用作希尔伯特空间的子集的模型，但这种可能性还没有得到人们的认可。由于在概念上没有一个基本的结构，所以不同的函数集之间的关系还不清楚。可以这样说，人们对这个问题没有一致的看法。随着希尔伯特空间的发明，数学家们能够用广义的希尔伯特空间几何学来重新构造有关函数集的具体问题。他们通过研究希尔伯特空间所获取的结果当时能够应用于

许多具体的函数类,这种发展从概念上统一了一个广泛的、以前曾经分裂的领域。随着泛函分析在科学以及其他数学分支里的应用,这门学科被证明是一个重要的数学分支,而无限维函数空间的研究只不过是泛函分析的一部分。

希尔伯特空间只是其中一类无限维空间。无限维空间还有许多其他类型,每一类都有其独特的数学性质。除希尔伯特空间之外,这些空间中还有一部分以其发现者的名字来命名。例如,巴拿赫空间和索伯列夫空间就是人们最广泛研究的空间中的两个。前者用出生在前奥匈帝国的数学家巴拿赫(Stefan Banach,1892—1945)的名字来命名,后者用俄国数学家索伯列夫(Sergei Lvovich Sobolev,1908—1989)的名字来命名。其他被人们所广泛研究的无限维空间有着听起来更实用主义的名字。例如,核空间和分布空间。所有这些空间都是对应具体的数学问题而发明(或发现的,与个人的观点有关)出来的。但是,许多数学家在熟悉了这些空间以后,对它们的性质变得着迷,以至于把这些性质当作数学对象。现在,就像两千多年前的希腊数学家研究欧几里得几何学一样,一些数学家出于自己的兴趣研究无限维空间:当代的数学家们寻求对这些空间进行分类,并且提出和回答揭示每类空间所具有的重要结构的性质的问题。虽然研究的数学主题改变了,但促使这些数学家产生数学好奇心的本质与许多年以前激发阿波罗尼奥斯、欧几里得和阿基米德的一样没变。

但是,存在许多无限维空间也是它们在数学之外有用的一种反映。现在,数学家和物理学家已经知道如何使用具体的空间来提出大量重要的物理学问题。例如,解决汹涌的流体的流动、冲击波以及原子的内部结构中的问题,有时依赖对无限维空间的性质

的深刻理解。人们对无限维空间的研究始于20世纪早期，至今它仍是一个活跃的研究领域。

无限维空间只是近来几何学中的概念向更为奇怪的空间扩张的一个例子。在几千年的历史长河中，古希腊的尺规作图——通过在光滑的石头上撒沙子来实现——让位于其他的几何学（高维空间中的几何学），并且是在日益抽象的水平上。但欧几里得几何学（古希腊的几何学）一直延续到现在，它是每个学生接受数学教育的一个重要组成部分，并且被广泛用于许多科学学科和工程学科。最为重要的是，欧几里得的几何思想——虽然其后继者们推广、修改和完善了这些几何思想，远远超过了欧几里得认为这是自己的创造这一点——仍没有被现代的数学家们所抛弃。毕达哥拉斯定理、公理化推理和点的概念在高等数学里仍旧很重要，这一点就像在欧几里得那个时代一样。在高等数学的每个分支里并不是都存在着学科的这种统一，还存在其他类型的面目已完全改观的数学。除了名字之外，这些学科——代数学只是其中一个例子——与它们的历史渊源毫无共同之处。另一方面，几何学在自身的演化过程中没有丢掉对线、面和形状的强调。几何学仍旧是我们观察世界的方式的一种表达。

大 事 年 表

约公元前 3000 年

埃及使用象形的数字。

约公元前 2500 年

出现胡夫大金字塔(the Great Pyramid of Khufu)。

约公元前 2400 年

美索不达米亚(Mesopotamia)使用几乎完全的位值制记数法。

约公元前 1800 年

颁布汉谟拉比法典(The Code of Hammurabi)。

约公元前 1650 年

埃及书记员阿梅斯(Ahmes)抄写了一份早期的文件,即现在所说的阿梅斯(或莱茵德[Rhind])纸草书。

约公元前 1200 年

特洛伊(Trojan)战争爆发。

约公元前 740 年

荷马(Homer)创作关于特洛伊战争的史诗,《伊利亚特》(*Iliad*)和《奥德赛》(*Odyssey*)。

约公元前 585 年

米利都的泰勒斯(Thales of Miletus)进行几何学研究,标志着数学成为一门演绎推导的科学。

约公元前 540 年

萨摩斯的毕达哥拉斯(Pythagoras of Samos)建立毕达哥拉斯哲学学派。

约公元前 500 年

中国使用算筹数码。

约公元前 420 年

埃利亚的芝诺(Zeno of Elea)提出他的哲学悖论。

约公元前 399 年

苏格拉底(Socrates)去世。

约公元前 360 年

欧多克索斯(Eudoxus)从事他的数学研究,发明穷竭法。

约公元前 350 年

希腊数学家梅内克缪斯(Menaechmus)写了一部有关圆锥曲线的重要著作。

约公元前 347 年

柏拉图(Plato)去世。

公元前 332 年

埃及建成亚历山大城(Alexandria),它是希腊数学中心。

约公元前 300 年

亚历山大的欧几里得(Euclid of Alexandria)著《几何原本》(*Elements*),有史以来最有影响的数学著作。

约公元前 260 年

萨摩斯的阿利斯塔克(Aristarchus of Samos)计算地月距离与地日距离之比。

约公元前 230 年

昔兰尼的埃拉托塞尼(Eratosthenes of Cyrene)计算地球的周长。

佩尔格的阿波罗尼奥斯(Apollonius of Perga)著《圆锥曲线论》(*Conics*)。

叙拉古的阿基米德(Archimedes of Syracuse)著《方法》(*The Method*)、《平板的平衡》(*Equilibrium of Planes*)以及其他著作。

公元前 206 年

汉朝建立,中国数学进入繁荣时期。

约 150 年

亚历山大的托勒密(Ptolemy of Alexandria)著《天文学大成》(*Almagest*),是古代最有影响的天文学著作。

约 250 年

亚历山大的丢番图(Diophantus of Alexandria)著《算术》(*Arithmetica*),向代数学迈出重要一步。

约 320 年

亚历山大的帕普斯(Pappus of Alexandria)著《汇编》(*Collection*),是希腊晚期颇具影响的数学论著之一。

415 年

亚历山大的哲学家和数学家许帕提娅(Hypatia)遇害,标志着希腊数学文明的衰落。

约 476 年

天文学家和数学家阿耶波多(Aryabhata)诞生;印度数学繁荣起来。

约630年

印度数学家和天文学家婆罗摩笈多(Brahmagupta)著《婆罗摩修正体系》(*Brahma-sphuta-siddhānta*),其中叙述了位值制记数法。

641年

亚历山大图书馆被焚毁。

约775年

巴格达学者们开始把印度和希腊著作译成阿拉伯文。

约830年

穆罕默德·伊本-穆萨·花拉子米(Mohammed ibn-Mūsā al-Khwārizmī)著《还原与对消计算概要》(*Hisāb al-jabr wa'l muqābala*),这是代数学的一种新方法。

833年

巴格达(今伊拉克)智慧宫的建造者马蒙(Al-Ma'mūn)去世。

约840年

耆那教徒、数学家马哈维亚(Mahavira)著《计算方法纲要》(*Ganita Sara Samgraba*),一本重要的数学教科书。

1071年

征服者威廉(William)镇压英格兰人最后的反抗。

1086年

对英格兰的财富进行广泛的普查,其结果录入《末日审判书》(*Domesday Book*)的表格和名单之中。

1123年

奥马·海亚姆(Omar Khayyám)去世。他是《代数问题的证明》(*Al-jabr w'al muqābala*)与《鲁拜集》(*The Rubáiyát*)的作者,古典伊斯兰最后一位伟大的数学家。

约 1144 年

婆什迦罗第二(Bhaskara II)著《丽罗娃提》(*Lilavati*)及《算法本源》(*Vija-Ganita*),这是古代印度数学传统最后两本伟大著作。

约 1202 年

《算数书》(*Liber Abaci*)的作者——比萨的利奥纳多(斐波那契)(Leonardo of Pisa [Fibonacci])到达欧洲。

1360 年

法国数学家、罗马天主教主教尼古拉斯·奥雷斯姆(Nicholas Oresme)把距离表示为速度曲线下的面积。

1471 年

德国艺术家阿尔布雷蒂·丢勒(Albrecht Dürer)诞生。

1482 年

利奥纳多·达·芬奇(Leonardo da Vinci)开始记日记。

约 1541 年

意大利数学家尼科洛·丰坦那(Niccolò Fontana),又名塔尔塔利亚(Tartaglia),发现了求解三次代数方程的一般方法。

1543 年

哥白尼(Copernicus)发表《论旋转》(*De Revolutionibus*),标志着哥白尼革命的开始。

1545 年

意大利数学家和医生吉罗拉马·卡尔达诺(Girolamo Cardano)出版《大术》(*Ars Magna*),标志近代代数学的开端。后来他出版《游戏机遇的学说》(*Liber de Ludo Aleae*)是第一本概率书。

约 1554 年

瓦尔特·雷利爵士(Sir Walter Raleigh)诞生。他是探险家、冒险家、数学爱好者,也是数学家托马斯·哈里奥特(Thomas Harriot)的保护人。

1579 年

法国数学家弗朗索瓦·韦达(François Viète)出版《数学基础》(*Canon Mathematicus*),标志着近代代数符号的出现。

1585 年

荷兰数学家和工程师西蒙·斯蒂文(Simon Stevin)出版《十进位》(*La disme*)。

1609 年

约翰尼斯·开普勒(Johannes Kepler)出版《新天文学》(*Astronomia Nova*)。他发现开普勒行星运动定律。

伽利略·伽利莱(Galileo Galilei)开始他的天文观测。

1621 年

英国数学家、天文学家托马斯·哈里奥特(Thomas Harriot)去世。他的唯一著作《实用分析术》(*Artis Analyticae Praxis*)于 1631 年出版。

约 1630 年

法国数学家、律师彼埃尔·德·费马(Pierre de Fermat)开始他的数学研究生涯。他是声称证明"费马大定理"的第一人。

1636 年

法国数学家和工程师吉拉德·德扎格(Gérard [或 Girard] Desargues)出版《透视截面论》(*Traité de la section perspective*),标志着射影几何学的开端。

1637 年

法国哲学家、数学家雷内·笛卡儿(René Descartes)出版《方法论》(*Discours de la méthode*),彻底改变了代数学和几何学。

1638 年

在伽利略·伽利莱(Galileo Galilei)监禁期间,《关于两种新科学的对话》(*Dialogues Concerning Two New Sciences*)出版。

1640 年

法国哲学家、科学家、数学家巴莱斯·帕斯卡(Blaise Pascal)发表《圆锥曲线论》(*Essai sur les coniques*),这是德扎格(Desargues)工作的延伸。

1642 年

巴莱斯·帕斯卡(Blaise Pascal)制造最早的机械计算器——帕斯卡机(Pascaline)。

1648 年

遍及欧洲大部分地区的"三十年战争"(The Thirty Years' War)结束。

1649 年

奥利弗·克伦威尔(Oliver Cromwell)在内战后取得英国政府的控制权。

1654 年

彼埃尔·德·费马(Pierre de Fermat)与巴莱斯·帕斯卡(Blaise Pascal)交换一系列信件讨论概率问题,吸引了许多数学家研究这个课题。

1655 年

英国数学家和教士约翰·沃利斯(John Wallis)出版《无穷算术》(*Arithmetica Infinitorum*),这是微积分产生之前的重要著作。

1657 年

荷兰数学家、天文学家、物理学家克里斯蒂安·惠更斯(Christian Huygens)出版《论赌博中的计算》(*De Ratiociniis in Ludo Aleae*),一部十分有影响的概率论著作。

1662 年

英国商人约翰·格朗特(John Graunt)发表伦敦死亡统计表,公布了他的研究,成为统计学的先驱。

1673 年

德国哲学家、数学家戈特弗里德·莱布尼茨(Gottfried Leibniz)建造一台机械计算器,可以进行加法、减法、乘法、除法以及开方运算。

1683 年

日本数学家关孝和(Seki Kowa)发现行列式理论。

1684 年

戈特弗里德·莱布尼茨(Gottfried Leibniz)发表了有关微积分的第一篇论文《一种求极大、极小值与切线的新方法》(*Nova Mathodus pro Maximis et Minimis*)。

1687 年

英国数学家和物理学家艾萨克·牛顿(Isaac Newton),出版《自然哲学的数学原理》(*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*),开创了科学的新时代。

1693 年

英国数学家、天文学家埃德蒙·哈雷(Edmund Halley)对德国布雷斯劳(Breslau)的死亡率进行了统计研究。

1698 年

英国工程师、发明家托马斯·萨弗里(Thomas Savery)获得第一个蒸汽机专利。

1705 年

瑞士数学家雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli)去世。他关于概率论的主要著作《猜度术》(*Ars Conjectandi*)于 1713 年出版。

1712 年

第一个纽科门(Newcomen)蒸汽机制成。

1718 年

法国数学家亚伯拉罕·棣莫弗(Abraham de Moivre)出版《机遇学说》(*The Doctrine of Chances*),当时概率论的最高水平的著作。

1743 年

英国英格兰和爱尔兰圣公会主教、哲学家乔治·贝克莱(George Berkeley)出版《分析学家》(*The Analyst*),攻击由艾萨克·牛顿和戈特弗里德·莱布尼茨开创的新数学。

法国数学家、哲学家让·勒·朗·达朗贝尔(Jean Le Rond d'Alembert)开始编纂《百科全书》(*Encyclopédie*),这是欧洲启蒙时代伟大著作之一。

1748 年

瑞士数学家莱昂哈德·欧拉(Leonhard Euler)出版他的《引论》(*Introductio*)。

1749 年

法国数学家、科学家乔治－路易·勒克莱克·布丰(George-Louis Leclerc Buffon)出版他的《自然史》(*Histoire naturelle*)第一卷。

1750 年

瑞士数学家加布里耶·克莱姆(Gabriel Cramer)发表"克莱姆法则",是求解线性方程组的一个方法。

1760 年

瑞士数学家、科学家丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli)发表他对种牛痘法对抗天花的风险和益处的概率分析。

1761 年

英国神学家、数学家托马斯·贝叶斯(Thomas Bayes)去世。两年之后,其

“求解一个机遇学说的问题试论”(Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances)发表。

英国科学家约瑟夫·布莱克(Joseph Black)提出潜热理论。

1762年

凯瑟林二世(凯瑟林大帝)(Catherine II [Catherine the Great])称俄国女皇。

1769年

詹姆斯·瓦特(James Watt)获得他的第一项蒸汽机专利。

1775年

美国殖民地人民与英国军队在马萨诸塞州(Massachusetts)莱兴顿(Lexington)和康科德(Concord)开战。

1778年

法国作家伏尔泰去世。

1781年

德国出生的英国天文学家、音乐家威廉·赫舍尔(William Herschel)去世。

1789年

法国动荡不安,爆发法国大革命。

1793年

法国大革命的残酷斗争时期。

1794年

法国数学家阿得里安-马丽·勒让德(Adrien-Marie Legendre 或 Le Gendre)出版其《几何基础》(*Éléments de géométrie*),此书影响其后几十年的数学教育。

法国科学家安托万-劳伦特·拉瓦锡(Antoine-Laurent Lavoisier)被法国政府处决。他是物质守恒定律的发现者。

1798 年

英国物理学家本杰明·汤姆森(拉姆福德伯爵)(Benjamin Thompson[Count Rumford])提出热功等价。

1799 年

拿破仑·波拿巴(Napoléon Bonaparte)夺取法国政府的控制权。

挪威数学家、测量员加斯帕·韦塞尔(Caspar Wessel)发表复数的第一个几何表示。

1801 年

卡尔·弗里德里希·高斯(Carl Friedrich Gauss)出版《算术探究》(*Disquisitiones Arithmeticae*)。

1805 年

法国数学家阿得里安-马丽·勒让德(Adrien-Marie Legendre)发表"决定彗星轨道的新方法"(Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes),其中包括最小二乘法的首次论述。

1806 年

法国数学家、簿记、会计让·罗伯尔·阿尔冈(Jean-Robert Argand)发展出阿尔冈图来表示复数。

1812 年

法国数学家皮埃尔-西蒙·拉普拉斯(Pierre-Simon Laplace)出版《概率的解析理论》(*Théorie analytique des probabilités*),这是 19 世纪最有影响的概率论著作。

1815 年

拿破仑(Napoléon)在滑铁卢战役中遭到最终失败。

法国数学家让-维克托·庞塞莱(Jean-Victor Poncelet)出版《论图形的射影性质》(*Traité des propriétés projectives des figures*),他被称为"射影几何学之父"。

1824 年

法国工程师萨迪·卡诺(Sadi Carnot)出版《思考》(*Réflexions*),其中描述卡诺热机。

挪威数学家尼尔斯·亨里克·阿贝尔(Niels Henrik Abel)发表他关于一般五次方程不可能代数求解的证明。

1826 年

俄国数学家尼古莱·伊凡诺维奇·罗巴切夫斯基(Nikolay Ivanovich Lobachevsky)宣布他的非欧几何学理论。他被称为"几何学的哥白尼"。

1828 年

苏格兰植物学家罗伯特·布朗(Robert Brown)发表"显微镜观察结果的简短说明"(A Brief Account of Microscopical Observations),对布朗运动进行了首次描述。

1830 年

英国数学家、发明家查理斯·巴贝奇(Charles Babbage)开始研究他的第一台分析机,这是现代计算机的首次尝试。

1832 年

匈牙利数学家亚诺什·波尔约(János Bolyai)发表《绝对的空间科学》(*Absolute Science of Space*)。

法国数学家埃瓦利斯特·伽罗瓦(Évariste Galois)在决斗中被害。

1843 年

詹姆斯·普雷斯科特·焦耳(James Prescott Joule)发表他关于热功当量的测量。

1846 年

法国数学家于尔班-让-约瑟夫·韦里耶(Urbain-Jean-Joseph Le Verrier)通过对天王星轨道的数学分析发现海王星。

1847 年

格奥尔格·克里斯蒂安·冯·施陶特(Georg Christian von Staudt)发表《位置几何学》(*Geometrie der Lage*),说明射影几何学可以脱离任何长度的概念进行表示。

1848 年

捷克数学家、神学家贝恩哈德·波尔查诺(Bernhard Bolzano)去世。他关于无穷集合的研究《无穷的悖论》(*Paradoxien des Unendlichen*)于 1851 年发表。

1850 年

德国数学家、物理学家鲁道夫·克劳修斯(Rudolph Clausius)发表了他的第一篇有关热论的文章。

1851 年

英国科学家威廉·汤姆逊(开尔文勋爵)(William Thomson[Lord Kelvin])发表"论热的动力学理论"(On the Dynamical Theory of Heat)。

1854 年

英国数学家乔治·布尔(George Boole)发表《思维的规律》(*Laws of Thought*),其中包含的数学使后来计算机逻辑电路的设计成为可能。

德国数学家贝恩哈德·黎曼(Bernhard Riemann)作了一次历史性演讲"论构建几何基础的假设"(On the Hypotheses That Form the Foundations of Geometry),其中的理论后来成为相对论必不可少的一部分。

1855 年

英国医师约翰·斯诺(John Snow)发表"论霍乱传播的形式"(On the Mode of Communication of Cholera),这是对流行病研究取得的首次成功。

1859 年

英国物理学家詹姆斯·克莱科·麦克斯韦(James Clerk Maxwell)提出空气中分子的速率分布概型。

英国生物学家查尔斯·达尔文(Charles Darwin)发表了《物种起源——物

竞天择》(*On the Origin of Species by Means of Natural Selection*)。

1861 年

美国内战爆发。

1866 年

奥地利生物学家、教士格雷戈尔·孟德尔(Gregor Mendel)在"植物杂交试验"(Versuche über Pflanzenhybriden)中发表他关于遗传理论的思想。

1867 年

加拿大联邦法案统一英国在北美的殖民地。

1871 年

奥托·冯·俾斯麦(Otto von Bismarck)被任命为德意志帝国第一任首相。

1872 年

德国数学家菲列克斯·克莱因(Felix Klein)发表他的埃尔朗根纲领(Erlanger Programm),这是用群论来分类所有几何学的尝试。

开尔文勋爵(威廉·汤姆逊)(Lord Kelvin[William Thomson])开发最早的模拟计算机来预报海潮。

德国数学家理查德·戴德金(Richard Dedekind)严格建立实数与实数直线之间的联系。

1874 年

德国数学家格奥尔格·康托尔(Georg Cantor)发表"论所有实代数数集合的一个性质"(Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reelen algebraischen Zahlen),这是集合论的首创论文,其中证明并非所有无穷集合均具有同样的大小。

1890 年

美国人口普查局安装霍勒里斯制表格机(The Hollerith tabulator)用来进行1890 年人口普查,这是计算器械一次重要革新。

1899 年

德国数学家大卫·希尔伯特(David Hilbert)发表欧几里得几何学的带有决定性的公理处理。

1900 年

大卫·希尔伯特(David Hilbert)发表他为 20 世纪数学发展提出的数学问题。

俄国数学家安德烈·安德烈耶维奇·马尔可夫(Andrey Andreyevich Markov)开始他对概率论的研究。

1901 年

法国数学家亨利－莱昂·勒贝格(Henri-Léon Lebesgue)发展他的积分理论。

1905 年

德国数学家恩斯特·策梅罗(Ernst Zermelo)从事集合论公理化的研究。

生于德国的美国物理学家艾尔伯特·爱因斯坦(Albert Einstein)发表他的物理学发现。

1906 年

波兰科学家玛利亚·斯莫卢绍夫斯基(Marian Smoluchowski)发表他对布朗运动的研究。

1908 年

哈代－温伯格(Hardy-Weinberg) 定律发表,其中包含群体遗传学一些基本思想。

1910 年

英国逻辑学家、哲学家贝尔特朗·罗素(Bertrand Russell)和英国数学家、哲学家阿尔弗莱德·诺斯·怀特海(Alfred North Whitehead)出版《数学原理》(*Prinicipia Mathematica*),这是关于数学基础的重要著作。

1914 年

第一次世界大战爆发。

1917 年

列宁领导十月革命,导致了苏联的建立。

1918 年

第一次世界大战结束。

德国数学家埃米·诺特(Emmy Noether)提出对称性在物理学中的作用的相关思想。

1929 年

苏联数学家安德雷·尼古拉耶维奇·柯尔莫哥洛夫(Andrey Nikolayevich Kolmogorov)发表《一般测度论和概率论》(*General Theory of Measure and Probability Theory*),第一次把概率论建立在稳固的公理基础之上。

1930 年

英国遗传学家、统计学家罗纳德·艾尔默·费希尔(Ronald Aylmer Fisher)出版《自然选择的遗传理论》(*Genetical Theory of Natural Selection*),这是用数学来表述自然选择理论的最早的重要尝试。

1931 年

奥地利出生的美国数学家柯特·哥德尔(Kurt Gödel)发表他的不完全性定理的证明。

麻省理工学院开发微分分析机,这是模拟计算机的重要发展。

1933 年

英国统计学家的创新者卡尔·皮尔逊(Karl Pearson)由伦敦大学学院退休。

1935 年

美国统计学家乔治·霍瑞斯·盖洛普(George Horace Gallup)创立美国舆论

研究所。

1937 年

英国数学家阿兰·图灵(Alan Turing)对可计算性的极限发表他的卓越见解。

1939 年

第二次世界大战爆发。

威廉·爱德华·戴明(William Edwards Deming)进入美国人口普查局工作。

1945 年

第二次世界大战结束。

1946 年

电子数值积分及计算器(ENIAC)在宾夕法尼亚大学开始运行。

1948 年

克劳德·申农(Claude Shannon)发表"通讯的数学理论"(A Mathematical Theory of Communication),标志着信息时代的开始。当时申农在美国贝尔电话公司工作。

1951 年

通用电子计算机(UNIVAC I)安装在美国人口普查局。

1954 年

一种计算机高级语言——公式翻译者(FORmula TRANslator, FORTRAN)被提出。

1956 年

质量控制领域的美国科学家沃特·史瓦特(Walter Shewhart)由贝尔电话实验室退休。

1957 年

奥尔佳·奥利伊尼克(Olga Oleinik)发表论文“非线性方程的不连续解”(Discontinuous Solutions to Nonlinear Differential Equations),它是数学物理的一个里程碑。

1964 年

IBM 公司为政府机构和大型企业引入 IBM 系统/360 计算机。

1965 年

安德雷·尼古拉耶维奇·柯尔莫哥洛夫(Andrey Nikolayevich Kolmogorov)建立一个数学分支——现在称为柯尔莫哥洛夫复杂性。

1966 年

IBM 系统/360 计算机使用 A 程序语言(A Programming Language, APL)。

1972 年

法国数学家、哲学家雷内·托姆(René Thom)建立一个新的数学领域——突变理论,轰动一时。

1973 年

贝尔实验室开发的计算机语言——C 语言,基本完成。

1975 年

法国地球物理学家让·莫莱(Jean Morlet)协助发展一种基于“小波”的分析方法。

1977 年

数字设备公司(Digital Equipment Corporation,DEC)引入 VAX 计算机。

1981 年

IBM 公司引入 IBM 个人计算机(PC)。

1989年

比利时数学家英格里德·道贝希(Ingrid Daubechies)发展了当今小波研究的数学基础。

1991年

苏联解体为15个独立的共和国。

1995年

英国数学家安德鲁·怀尔斯(Andrew Wiles)发表费马大定理的第一个证明。

克雷公司(Cray Research)引进CRAY E-1200,此计算机在实际应用中的计算速度达到每秒一百万亿次。

Sun公司(Sun Microsystems,通常简称Sun)通过商业渠道推出计算机语言JAVA。

1997年

雷内·托姆(René Thom)宣告数学领域——突变理论已经“死亡”。

2002年

《实验数学》(*Experimental Mathematics*)庆祝十周年。《实验数学》是一份学术期刊,主要涉及数学研究的实验方面。

马宁德拉·阿格拉瓦尔(Manindra Agrawal)、纳拉吉·卡雅尔(Neeraj Kayal)和尼汀·撒克辛纳(Nitin Saxena)创造一个简单而漂亮的算法来检验一个整数是否是素数,从而解决了一个重要的千古难题。

2003年

格里高利·彼列尔曼(Grigory Perelman)得出庞加莱猜想(Poincaré conjecture)的可能是第一个完满的证明,庞加莱猜想是三维图形最为基本的性质。

术 语 表

绝对空间(absolute space)
物质空间不依赖于它所包围的世界而存在的观念。

绝对时间(absolute time)
主张时间对于所有的参照系消逝的速度都相同的理论。

代数学(algebra)
算术的推广。在代数学里,我们用字母来代替数,字母按照通常的算术步骤进行运算。

解析几何学(analytic geometry)
借助代数学和坐标系进行研究的几何学。

公理(axiom)
人们公认为正确而将其作为演绎推理根据的命题。现在,公理和公设(postulate)同义。

微分(calculus)
以微分和积分的思想和方法为基础的数学分支。微分法能够使研究者解决数学和物理学中的许多问题。

笛卡儿坐标(Cartesian coordinates)
利用相交于中心点(原点)的、且两两正交的 n 条直线(其中 n 表示任意自然数),在 n 维空间中的点和 n 元数之间建立的一种一一对应的方法。

全等(congruence)

图形之间的一种几何关系,与算术中的“相等”类似。如果两个三角形能够通过一系列的平移和旋转重合,我们就称这两个三角形全等。

二次曲线(conic)

参见圆锥曲线(CONIC SECTION)。

圆锥曲线(conic section)

由对顶锥和平面相交所形成的任意一种曲线族。

坐标系(coordinate system)

一种在空间中的点和数集之间建立一一对应的方法。

交比(cross-ratio)

一个在射影变换下保持不变的性质。设 A、B、C 和 D 是一条直线上依次排列的四个点,A'、B'、C' 和 D' 分别是它们在射影变换下的像。例如,设 AB 和 $C'D'$ 分别代表 A 和 B、C' 和 D' 之间的有向线段,那么由 $(AC/CB)/(AD/DB)$ 和 $(A'C'/C'B')/(A'D'/D'B')$ 定义的交比总相等。

推论(deduction)

由一般原理向特殊命题进行逻辑推理而得到的结论。

导数(derivative)

当自变量之差趋向于 0 时,因变量之差与自变量之差所构成的比的极限。

微分几何学(differential geometry)

几何学的一个分支,在研究曲线和曲面的局部性质时使用微积分。

微分(differentiation)

求导数的过程。

对偶原理(principle of duality)
射影几何学中的一个原理,它宣称:当互换点和线两个词,并作相应的语法调整时,每个有关点和线的定理仍然正确。

椭圆(ellipse)
直立圆锥和平面相交所形成的封闭曲线。

欧几里得几何学(Euclidean geometry)
一门几何学,它是从欧几里得的《几何原本》里列出的公理和公设所推出的一系列逻辑结论。

第五公设(fifth postulate)
欧几里得的命题之一,它定义了欧几里得所研究的几何学的性质。事实上,它宣称:已知一条直线和直线外的一点,过这个点恰能作出一条与已知直线平行的直线。

解析几何学的基本原理(fundamental principle of analytic geometry)
在极其一般的条件下,一个含有两个变量的方程定义了一条曲线。

立体解析几何学的基本原理(fundamental principle of solid analytic geometry)
在极其一般的条件下,一个含有三个变量的方程定义了一个曲面。

测地线(geodesic)
连接已知曲面上两个点之间的最短路径。

几何代数(geometric algebra)
利用欧几里得几何学中的概念和方法,来表达往往与代数学有关的思想的一种方法。

群(group)
赋有一种类似于乘法运算的一个对象集合,满足以下条件:(1)集合中的任意两个元素的"乘积"仍为该集合中的一个元素。(2)运算符合结合律。即:对

于群中的任意三个元素 a、b 和 c，$(ab)c = a(bc)$。(3)集合中存在一个元素，通常用字母 e 来表示，满足 $ea = ae = a$（其中 a 表示集合中的任意一个元素）。(4)集合中的每个元素都有一个逆元。因此，如果 a 是集合中的一个元素，那么存在一个称为 a^{-1} 的元素，满足 $aa^{-1} = e$。

六边形(hexagon)

有六个角和六个面的多边形。

希尔伯特空间(Hilbert space)

一类以数学家希尔伯特(David Hilbert，1862—1943)的名字来命名的数学空间。希尔伯特空间通常是无限维的，一般用于函数集的研究。

双曲线(hyperbola)

平面和对顶直立圆锥的两部分相交所形成的曲线。

不定方程(indeterminate equation)

存在无穷多个解的方程或方程组。

积分(integration)

在求曲线的长度、面积的大小以及立体图形的体积中使用的思想和方法，它们属于微积分。

不变性(invariant)

在一组特殊的数学变换或者物理变换下保持不变。

穷竭法(method of exhaustion)

希腊几何学里的一个命题：已知任意一个量 M，我们总能够使它至少缩小为原来的一半，如此重复此过程，最终这个量会像我们所需要的那样小。已知一个"小的"正数（通常用希腊字母 ε(epsilon)来表示），且 r 满足 $0 < r < 1/2$，只要 n 足够大（这里 n 是一个自然数），那么总有 $M \times r^n < \varepsilon$。该命题是希腊数学中类似于微积分的数学知识的基础。

抛物线(parabola)

直立圆锥和平行于圆锥母线的平面相交所形成的曲线。

透视(perspective)

像人们所看到的那样,把三维对象的空间关系表示在平面上的过程。

无穷远点(point at infinity)

射影几何学中的无穷远点与表象艺术中的消失点类似。它是两条"平行的"线的交点。

公设(postulate)

参见公理(AXIOM)。

射影(projection)

射影几何学中保持透视感的图像或对象的变换。

射影几何学(projective geometry)

一门与图形在射影下不变的性质有关的几何学分支。

毕达哥拉斯定理(Pythagorean geometry)

在直角三角形里,斜边长的平方等于其余两边长的平方和。

毕达哥拉斯三元数组(Pythagorean triple)

满足如下性质的三个自然数:其中两个较小数的平方和等于最大数的平方。

二次曲面(quadric surface)

由含有变量 x、y 和 z 的二次方程所刻画的任一曲面。一共存在六类二次曲面:椭球、单叶双曲面、双叶双曲面、椭圆锥面、椭圆抛物面和双曲抛物面。

参照系(reference frame)

一组想象成与一个称作原点的点有关的线,其目的是确定空间中与原点有关的任意一点的位置。

集合(set)

一个由对象或符号构成的集。

狭义相对论(special relativity)

以如下断言为基础的物理学理论:物理学定律——包括光速——对于所有作匀速运动的参照系都相同。

立体解析几何学(solid analytic geometry)

解析几何学的一个分支,它主要与曲面的性质有关。

综合几何学(synthetic geometry)

不使用代数符号或解析符号来表示的几何学。

相切(tangent)

在光滑曲线上一点处与该曲线最逼近的直线。

变换(transformation)

把一个几何对象映射为另一个几何对象的过程,它建立了这个对象的点和它的像之间的一个一一对应。